

---

---

# Braunschweiger Schriften zur Mechanik

---

---

**Sabine Langer**

**Schalltransmission durch Isolierverglasung**

---

**Mechanik-Zentrum**  
**Technische Universität Braunschweig**

ISBN 3-920395-40-9

# **Schalltransmission durch Isolierverglasung**

vom

Fachbereich Bauingenieurwesen  
der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina  
zu Braunschweig

zur Erlangung des Grades einer Doktor-Ingenieurin  
(Dr.–Ing.)

genehmigte

D i s s e r t a t i o n

von

Dipl.–Ing. Sabine Langer  
aus Wolfenbüttel

Berichterstatter:	Prof. Dr. rer. nat H. Antes Prof. Dr.–Ing O. v. Estorff
Eingereicht am:	12.03.2001
Mündliche Prüfung:	15.06.2001

2001

## **Zusammenfassung**

Der Nachweis der Schalldämmwirkung von Isolierfenstern erfolgt bisher in der Regel durch Messungen unter normierten Bedingungen, obwohl eine numerische Simulation schneller und effektiver wäre. Deshalb wird dafür hier ein Berechnungsmodell entwickelt, das die Schallwellenausbreitung und den Schalldurchgang durch mehrfach verglaste Fenster sowie alle auftretenden dynamischen Wechselwirkungsvorgänge beinhaltet.

Bei diesem Berechnungsmodell sollen die Vorteile der Finite-Element-Methode (FEM) für elastische Strukturen und abgeschlossene Gebiete mit den Vorteilen der Randelementmethode (REM) für unendlich ausgedehnte Gebiete kombiniert werden. Daher werden die Fensterscheiben, die aufgrund von Schalldruckänderungen in der umgebenden Luft Biegeschwingungen erfahren und als Kirchhoffplatten modelliert werden, ebenso wie der gasgefüllte Scheibenzwischenraum und die abgeschlossenen, luftgefüllten Räume des Gebäudes mit der FEM behandelt. Die das Gebäude umgebende Luft stellt ein unendlich ausgedehntes Gebiet dar und wird daher mit der REM approximiert. Den Wechselwirkungen zwischen der Struktur und dem umgebenden Fluid wird durch eine Kopplung der Simulationsmodelle über das Arbeitsprinzip Rechnung getragen.

Einen Schwerpunkt der Untersuchungen bilden die Anwendungen des Verfahrens zur Simulation der Schalltransmission durch ein spezielles Außenbauteil im Hochbau, das Fenster. Anhand von Beispielen wird die Bandbreite konstruktiver Gestaltungen von Isolierverglasungen aufgezeigt und insbesondere der Einfluß verschiedener Konstruktionsparameter auf die Schalldämmung näher erläutert.

Es wird deutlich, daß mit dem vorgestellten numerischen Berechnungsmodell der Schalltransmissionsmechanismus durch Isolierverglasungen für beliebige Lärmsituationen simuliert und die Auswirkungen konstruktiver Modifikationen in der Entwurfsphase abgeschätzt werden können.

## **Abstract**

Generally, the window's transmission loss factor is determined experimentally under normed conditions although a numerical simulation would be faster and more effective. Therefore, here, a numerical methodology is presented for analysing the propagation of sound waves and the transmission of sound through multi-paned windows including all dynamic interaction phenomena.

In the numerical model, the advantages of the Finite-Element-Method (FEM) for elastic structures and bounded acoustic domains shall be combined with the advantages of the Boundary Element Method (BEM) for unbounded domains. Hence, the panes, vibrating due to sound pressure changes in the surrounding air and treated as Kirchhoff plates, the gas-filled gap between the panes, and bounded air-filled interior rooms are modelled via the FEM. The air outside the building is a half space and, therefore, it is modelled with BEM. The interactions between the structures and the air are considered by a coupling using the principle of virtual work.

An emphasis of the studies is the simulation of sound transmission to predict the sound insulation of windows. The wide spectrum of their constructive composition is pointed out and, in particular, it is studied which parameters affect the sound transmission substantially.

It becomes obvious that the mechanism of sound transmission through multi-paned windows can be simulated for any noise situation with the presented numerical method and that the effects of constructive modifications can be predicted in the stage of designing.





# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Stand der Forschung . . . . .	2
1.2	Ziele . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Modellbildung – Mathematische Formulierung</b>	<b>6</b>
2.1	Schallabstrahlung einer schwingenden Platte . . . . .	7
2.1.1	Wellen in Fluiden und festen Körpern . . . . .	7
2.1.2	Grenzfrequenz, Nah- und Fernfeld . . . . .	10
2.2	Schwingungen ebener Platten . . . . .	12
2.2.1	Biegewellengleichung nach Timoshenko-Mindlin . . . . .	16
2.2.2	Biegewellengleichung nach Kirchhoff . . . . .	16
2.2.3	Eigenschwingungen von Platten . . . . .	20
2.2.4	Visko-elastische Dämpfung von Platten . . . . .	21
2.2.5	Visko-elastische Dämpfung von Laminat-Platten . . . . .	26
2.3	Wellenausbreitung im kompressiblen Fluid . . . . .	31
2.3.1	Akustische Randwertprobleme . . . . .	33
2.3.2	Eindeutigkeit von Randwertproblemen . . . . .	34
2.3.3	Praxisrelevante Randbedingungen an Begrenzungsflächen . . . . .	35
2.3.4	Eigenschwingungen des rechteckigen Raumes . . . . .	38
<b>3</b>	<b>Simulation von Schalltransmission</b>	<b>39</b>
3.1	Finite-Element-Methode (FEM) . . . . .	39
3.1.1	FEM für die Biegebewegung der Kirchhoffplatte . . . . .	39
3.1.2	FEM für die Wellenausbreitung in kompressiblen Fluiden . . . . .	43
3.2	Randelementmethode (REM) . . . . .	45
3.2.1	REM für die Wellenausbreitung in kompressiblen Fluiden . . . . .	45
3.2.2	Nichteindeutigkeit der Integraldarstellung . . . . .	49
3.2.3	REM bei Halbraum-Problemen . . . . .	50
<b>4</b>	<b>Modellierung der Fluid – Struktur Interaktion</b>	<b>52</b>
4.1	Kopplung ohne Einbeziehung der Rückwirkung . . . . .	52
4.2	Vollständige Kopplung mittels PvA . . . . .	54

4.2.1	Kopplung von FEM der Kirchhoffplatte mit FEM für ein kompressibles Fluid	55
4.2.2	Kopplung von REM für ein kompressibles Fluid mit FEM der Kirchhoffplatte	58
4.2.3	Gekoppeltes Berechnungsmodell aus Finite-Element und Randelementmethoden für doppeltverglaste Fenster	61
4.3	Verifikationsbeispiele	62
4.3.1	Schalldämmung einer einzelnen Platte - Vergleich von ungekoppelter und gekoppelter Berechnung	62
4.3.2	Schalldämmung von zwei Platten	67
4.3.3	Schalldämmung einer einzelnen Platte - Vergleich von gekoppelter FE/FE/FE- und gekoppelter FE/FE/RE-Berechnung	69
<b>5</b>	<b>Schalldämmung von Fenstern</b>	<b>71</b>
5.1	Kennzeichnung des Schallschutzes im Hochbau	71
5.2	Erforderliche Schalldämmung von Fenstern	74
5.3	Konstruktive Einflußfaktoren	74
5.3.1	Prinzipieller Verlauf des Schalldämm-Maßes eines einschaligen Bauteils	76
5.3.2	Prinzipieller Verlauf des Schalldämm-Maßes eines zweischaligen Bauteils	79
5.3.3	Lagerung	83
5.3.4	Verbundglas	83
5.4	Numerische Simulation	84
5.4.1	Konzeptionelles Vorgehen	84
5.4.2	Diskretes Modell	85
<b>6</b>	<b>Anwendungen</b>	<b>86</b>
6.1	Schalldämmung bei Lärm im Rauminnern	87
6.2	Schalldämmung bei Lärm in der Umgebung	91
6.3	Schalldämmwirkung der Füllung	94
6.3.1	Wirkung einer Gasfüllung	94
6.3.2	Wirkung einer Gasfüllung niederen Drucks	98
6.3.3	Wirkung einer Aerogelfüllung	100
6.4	Einfluß der Plattenlagerung auf die Schalldämmwirkung	101
6.5	Einfluß der Raumgeometrie auf die Schalldämmwirkung	102
6.6	Einfluß der Anregung auf die Schalldämmwirkung	105
6.7	Einfluß der Randbedingungen im SZR	105
6.8	Schalldämmwirkung von Verbundglasscheiben	107
6.9	Konstruktionsprinzipien für Isolierverglasung mit hoher Schalldämmwirkung	110
6.10	Analyse von Schallfeldern	112
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>117</b>
	<b>Verzeichnis der verwendeten Symbole</b>	<b>119</b>

# 1 Einleitung

Der Entwurf moderner Bauten sollte nicht alleine unter konstruktiven und ästhetischen Gesichtspunkten erfolgen, sondern insbesondere die bauphysikalischen Aspekte zur Sicherstellung der Wohnqualität berücksichtigen. Dem Schutz der Bewohner vor Lärm wird dabei in jüngerer Zeit zu Recht verstärkt Bedeutung geschenkt, da die gesundheitlichen Auswirkungen starker Lärmbelastungen gravierend sein können. Es ist durch Studien eindeutig belegt, daß der alltägliche Lärm nicht nur die Kommunikation behindert, sondern auch zur Minderung der Konzentrationsfähigkeit der Bewohner führt, die Lern- und Leistungsfähigkeit herabsetzt und eine Beeinträchtigung von Erholung und Entspannung bewirkt. Im schlimmsten Fall können diese Beeinträchtigungen bis zu Schlafstörungen reichen. Bei andauernder Stressbelastung durch Lärm sind negative körperliche Auswirkungen erwiesen: Sie bewirkt eine Belastung des Herz-Kreislaufsystems, so daß ein erhöhtes Risiko für derartige Erkrankungen besteht. Auch die Gefahr von Schwerhörigkeit infolge von Lärmeinwirkungen ist nicht zu unterschätzen [43].

Eine Minderung der Geräuschemissionen muß deshalb Ziel von städtebaulicher und Verkehrspolitik sein. Zwar wurde als Lärmschutzziel des Bundes in jüngster Zeit als maximale Belastung der Bevölkerung ein Pegel von 65 dB(A) am Tag und 55 dB(A) in der Nacht formuliert [103], jedoch ist eine Reduzierung der Belastung durch Verkehrslärm sogar durch aufwendige schallabschirmende Bauwerke wie Schallschutzmauern oder -wälle nur begrenzt möglich. Wenn die Entstehung des Lärms nicht verhindert werden kann (z.B. in der Nähe von Hauptverkehrsstraßen oder Flugplätzen), sind deshalb Maßnahmen an den Gebäuden zur Verbesserung der Schalldämmung und damit zur Verringerung der Geräuschemissionen erforderlich. Daneben müssen Gebäude in jedem Fall so ausgelegt werden, daß die Schalldämmung gegenüber Lärm in benachbarten Räumen und gegen Lärm durch die Haustechnik gewährleistet ist.

Das akustische Verhalten von Hochbauten stellt sich als komplexes Wechselwirkungsproblem dar, bei dem sowohl die unterschiedlichen Bauelemente und -stoffe wie auch die Umgebung eine große Rolle spielen. Eine Abschätzung dieses Verhaltens in der Entwurfsphase gestaltet sich daher als sehr schwierig. Den bauphysikalischen Schallschutznachweisen liegen in der Regel Mess- oder Erfahrungswerte von einzelnen Referenzbauteilen zugrunde, aus denen überschlägig die Schalldämmung des gesamten Bauwerks ermittelt wird.

Im Besonderen erfolgt der Nachweis der Schalldämmwirkung von Isolierfenstern bisher durch Messungen unter normierten Bedingungen, obwohl eine numerische Simulation schneller und effektiver wäre. Deshalb wird hier ein numerisches Berechnungsverfahren entwickelt, das die Schallwellenausbreitung und den Schalldurchgang durch mehrfach verglaste Fenster modelliert sowie alle auftretenden dynamischen Wechselwirkungsvorgänge beinhaltet.

## 1.1 Stand der Forschung

Die numerische Simulation von Schallausbreitungsvorgängen kann mit unterschiedlichen Verfahren realisiert werden.

Ein verbreitetes Diskretisierungsverfahren ist die *Finite-Element-Methode* (FEM) [108], die sich für die Behandlung von dynamischen Strukturproblemen weitgehend durchgesetzt hat. Mit diesem Verfahren läßt sich auch die Helmholtz-Gleichung zur Berechnung der Schalldruckverteilung in einem Fluid näherungsweise lösen [20, 21]. Die FEM ist zumindest bei endlichen Gebieten besonders effizient, da sie in der Regel auf ein symmetrisches, schwach besetztes Gesamtgleichungssystem führt. Bei der Behandlung von Wellenausbreitungsvorgängen in halbunendlichen oder unendlich ausgedehnten Gebieten muß die *Sommerfeldsche Abstrahlbedingung* [98], d.h. die Bedingung für ein Auslaufen der Wellen im Unendlichen erfüllt sein. Die FEM erfordert in der Regel die Diskretisierung eines geschlossenen Gebietes, so daß bei Abstrahlproblemen die Diskretisierung abgebrochen werden muß und es am Rand der FE-Diskretisierung zu Reflexionen von Wellen zurück in das Gebiet kommt, wodurch die Sommerfeldsche Abstrahlbedingung verletzt wird. Es wurden deshalb Methoden entwickelt, um die Erfüllung der Sommerfeldschen Abstrahlbedingung bei Verwendung der Finite-Element-Methode sicherzustellen:

Hierbei sind zum einen die Ansätze zu nennen, die weiterhin von einem begrenzt diskretisierten Gebiet ausgehen und die in einem gewissen Abstand vom abstrahlenden Objekt durch einen Randoperator absorbierende Randbedingungen näherungsweise erfüllen. Einen Überblick über solche Methoden ist in [47] zu finden. Die Idee, die Abstrahlbedingung durch nicht-reflektierende Bedingungen sicherzustellen, liegt auch den *Dirichlet-to-Neumann* Randbedingungen [46] zugrunde.

Zum anderen sind jene Ansätze zur Modifikation der FEM für Außenraumprobleme zu nennen, bei denen an den Rand der Diskretisierung Elemente mit unendlicher Ausdehnung gesetzt werden. Die Ansatzfunktionen dieser *Infiniten Elemente* enthalten Faktoren, die ein wellenförmiges Auslaufen nach außen abbilden können. Die *Infiniten Elemente* gehen auf Bettess/Zienkiewicz zurück. In [16] formulierten sie diese erstmals für zweidimensionale Probleme, Erweiterungen und eine ausführliche Darstellung der Methode werden in [15] dargelegt. Für akustische Problemstellungen haben Astley/Eversman [9] *Infinite Elemente* formuliert, die in diesem Bereich inzwischen breite Anwendung gefunden haben [7]. In [8] stellt Astley umfassend die Modifikation der *Infiniten Elemente* in einen Zusammenhang und beleuchtet Genauigkeit und Stabilität.

Die *Randelementmethode* (REM) erfüllt im Gegensatz zur FEM implizit die Sommerfeldsche Abstrahlbedingung und ist damit das geeignetere Verfahren zur Behandlung von Außenraumproblemen [4, 37, 38] und insbesondere von akustischen Problemstellungen wie z.B. dem der Schallschutzwirkung von Schallschutzwänden entlang von Autobahnen [5]. Ein weiterer Vorteil der REM ist, daß im Gegensatz zur FEM nur der Rand des Gebietes diskretisiert werden muß, so daß sich die Anzahl der Freiheitsgrade reduziert. Die Diskretisierung wird dabei in der Regel durch Kollokation (Projektion auf die Gitterknoten) durchgeführt, was allerdings auf ein vollbesetztes und unsymmetrisches Gleichungssystem führt, oder durch das Galerkin-Verfahren (orthogonale Projektion auf den Ansatzraum) vorgenommen [64].

Außerdem konnten effiziente Randelementverfahren für die Behandlung von akustischen, zeitvarianten Problemstellungen entwickelt werden [6], z.B. für die Schallfeldanalyse bei bewegten Schallquellen [61] sowie bei sich bewegenden schallerzeugenden Körpern [10].

Neben diesen Diskretisierungsverfahren findet für die Behandlung akustischer Problemstellungen die *statistische Energieanalyse* (SEA) vermehrt Anwendung [26]. Diese ist insbesondere geeignet, wenn die Komplexität von Geometrie und Material unterschiedlicher Bauteile eine genaue Modellierung aller Teile (noch) nicht oder nur mit unverhältnismäßig großem Aufwand möglich macht. Außerdem entfällt bei der statistischen Berücksichtigung der Schallübertragung der aufwendige Diskretisierungsaufwand, der bei der FEM und auch der REM für die realistische Modellierung des akustischen Verhaltens erforderlich ist. Allerdings weist diese Methode insbesondere für die Behandlung bauakustischer Probleme einen gravierenden Nachteil auf: Die SEA ist bei Schalldämmproblemen nur auf Frequenzen oberhalb der Grenzfrequenz anwendbar, d.h. falls die Wellenlänge der Struktur größer als die im umgebenden Fluid ist. Sie erfaßt also nicht die gesamte Bandbreite der typischen Anregung zum Beispiel durch Straßenlärm [27]. Die SEA ist damit im Vergleich zur Finite-Element-Methode und zur Randelementmethode weniger geeignet für die Behandlung bauakustischer Probleme.

Bei Schalltransmissionsvorgängen handelt es sich um eine typische Problemstellung aus dem Bereich der *Fluid/Struktur-Wechselwirkungsprobleme*. Bei der Behandlung solcher komplexer Aufgabenstellungen werden, da in der Regel keine analytischen Lösungswege zum Ziel führen, häufig Diskretisierungsverfahren herangezogen, wobei eine Kombination des numerischen Modells für die Struktur mit dem für das akustische Medium erforderlich ist. Dabei werden des öfteren Strategien verfolgt, die Rückwirkungseffekte unberücksichtigt lassen und damit nicht auf ein gekoppeltes System von Gleichungen führen. Hierbei wird der Schalldruck aus einer Schallfeldanalyse des Fluids als Last auf die Struktur aufgebracht. Beispielhaft für ein solches Vorgehen sei hier die Kombination von Finite-Element-Methoden für Struktur und Fluid nach [72] genannt.

Die Wechselwirkungen der einzelnen Teile eines Gebäudes untereinander und mit ihrer Umgebung beeinflussen allerdings das Verhalten in Bezug auf die Schalldämmung stark. Eine separate Analyse einzelner Teile ist damit unzureichend. Die Berücksichtigung von Rückwirkungen bei einer ungekoppelten Berechnung durch einen Iterationsprozeß [77] ist zwar möglich, aber aufwendig. Daher ist es sinnvoll, das gekoppelte System zu lösen, das das Gesamtproblem vollständig und richtig beschreibt.

Frühe Ansätze zur Kopplung der FE-Gleichungen für Fluid und Struktur basieren häufig auf dem Prinzip der virtuellen Arbeit [25, 105]. Um den numerischen Aufwand zu begrenzen, waren diese jedoch auf 2-dimensionale Probleme und die Kopplung von höchstens zwei oder drei Gebieten beschränkt. Andere Ansätze wählen für die Beschreibung von Struktur und Fluid gleiche Freiheitsgrade, so daß zum Beispiel bei einer Verschiebungsformulierung für beide Teile die Kopplung direkt und knotenweise erfolgen kann [12, 14, 22, 54].

Auch für die Kopplung der FE-Strukturgleichungen mit den RE-Gleichungen für das akustische Medium kann das Prinzip der virtuellen Arbeit herangezogen werden [33, 106]. Dies führt jeweils auf ein gemeinsames, gekoppeltes Gesamtgleichungssystem, mit dem alle Rückwirkungseffekte erfaßt werden. Um ein symmetrisches Gleichungssystem zu erzielen, wurden Symmetrisierungsalgorithmen vorgeschlagen (z.B. [109]) oder die Finite-Element Methode für

das dynamische Verhalten einer elastischen Struktur mit einer Variationsformulierung der Randelemente im akustischen Medium gekoppelt [24, 63].

Im Gegensatz zur knotenweisen Kopplung von FEM und Randelementmethode schlagen Schnack/Türke die sogenannte *Domain Decomposition* vor [94]. Dabei erfolgt die Kopplung der beiden unterschiedlichen Methoden in der schwachen Form, so daß die Diskretisierung der beiden Gebiete nicht übereinstimmen muß.

Fluid/Struktur–Wechselwirkungsprobleme können natürlich auch durch eine RE/RE-Kopplung behandelt werden, wenn das zu untersuchende plattenförmige Bauteil mit der Randelementmethode dargestellt wird [3]. Erwähnt seien diesbezüglich die Untersuchungen von Cheng und Antes [23].

Für die besondere Problematik der numerischen Simulation der Schalltransmission durch Trennbauteile wurde in jüngster Zeit eine Kopplung der Finite-Element-Methode mit der Randelementmethode vorgeschlagen. Bei dieser Methode wird das akustisch durchlässige Bauteil mit der FEM behandelt und in einen unendlich ausgedehnten, schallharten und undurchlässigen Schallschirm „eingebaut“. Die Modellierung des akustischen Mediums erfolgt dabei mit einer speziellen indirekten Randelementmethode unter Berücksichtigung der geometrischen Eigenschaften und akustischen Randbedingungen des Schallschirms [79].

## 1.2 Ziele

Mit der vorliegenden Arbeit soll ein numerisches Berechnungsverfahren zur Verfügung gestellt werden, das die Simulation von Schalltransmissionsvorgängen durch Isolierfenster ermöglicht. Das Berechnungsverfahren soll das Körperschallverhalten des Trennbauteils abbilden, das Schallfeld im untersuchten Gebiet liefern und die für eine schallschutztechnische Auslegung relevanten Kenngrößen ermitteln. Es ist für das numerische Modell naheliegend, die Vorteile der FEM für elastische Strukturen und abgeschlossene Gebiete mit den Vorteilen der REM für unendlich ausgedehnte Gebiete zu kombinieren.

Bevor Schalltransmissionsvorgänge mit diesen Methoden simuliert werden können, muß in geeigneter Form eine Modellbildung vorgenommen werden, damit eine mathematische Formulierung der Problemstellung erfolgen kann. In Kapitel 2 werden die einzelnen Aspekte des gewählten Modells eingehend diskutiert, wobei insbesondere auf die Mechanismen bei der Anregung von Schwingungen einer Struktur und die daraus resultierende Abstrahlung von Schall durch die schwingende Struktur in das umgebende Fluid als Grundlage für den Vorgang der Schalltransmission eingegangen wird. In diesem Kapitel finden sich daneben die Herleitungen der dem Modell zugrunde liegenden differentiellen Problembeschreibungen.

Die Simulation der Schalltransmission erfolgt wie oben beschrieben mit Finite-Element- und Randelementmethoden. Die Fensterscheiben, die aufgrund von Schalldruckänderungen in der umgebenden Luft eine Biegeschwingung erfahren, werden als Kirchhoffplatten mit der Finite-Element-Methode behandelt. Zur Beschreibung des gasgefüllten Scheibenzwischenraums und der abgeschlossenen, luftgefüllten Räume des Gebäudes dient ebenfalls die Finite-Element-Methode. Die das Gebäude umgebende Luft stellt ein unendlich ausgedehntes Gebiet dar und wird daher mit der Randelementmethode behandelt. Die wesentlichen Grundlagen für

die dynamische Behandlung von Kirchhoffplatten bzw. für die Schallausbreitung in einem kompressiblen Fluid mit diesen Diskretisierungsverfahren werden in Kapitel 3 kurz erläutert.

Bedeutend für die Untersuchung von Schalltransmissionsvorgängen sind die Wechselwirkungen zwischen der Struktur und dem umgebenden Fluid. Dieser Tatsache kann durch eine Kopplung der Simulationsmodelle Rechnung getragen werden. Dabei ist wesentlich, ob die Kopplung die Einbeziehung von Rückwirkungseffekten erlaubt. In Kapitel 4 werden daher eingehend unterschiedliche Kopplungsstrategien erläutert, wobei einen breiten Raum die Beschreibung der realisierten vollständigen Kopplung basierend auf dem Arbeitsprinzip einnimmt. In diesem Kapitel werden außerdem die Ergebnisse von Beispielrechnungen bei Verwendung unterschiedlicher Kopplungsvarianten verglichen, wodurch die Vorteile einer vollständig gekoppelten Berechnung aufgezeigt werden können.

Einen Schwerpunkt dieser Arbeit bildet die Anwendung des entwickelten Simulationsverfahrens zur Berechnung von Schalltransmissionen durch ein spezielles Außenbauteil im Hochbau, das Fenster. In Kapitel 5 wird daher die Schalldämmung von Fenstern näher beleuchtet. Dabei muß kurz auf den Schutz vor Lärm im Allgemeinen eingegangen werden, wie er durch die deutsche bzw. europäische Normung Berücksichtigung findet, damit sichergestellt ist, daß die aus der numerischen Berechnung ermittelten Bauteilkenngrößen eine Grundlage für die erforderlichen Nachweise bilden können. Daneben werden in diesem Kapitel die Bandbreite konstruktiver Gestaltungen von Fenstern aufgezeigt und insbesondere die Einflüsse der Konstruktionsparameter auf die Schalldämmung näher erläutert.

Zum Abschluß dieser Arbeit werden in Kapitel 6 Anwendungen des vollständig gekoppelten Simulationsmodell auf die Berechnung der Schalldämmung von Isolierverglasungen gezeigt. Insbesondere soll durch diese Anwendungsbeispiele verdeutlicht werden, daß durch die numerische Simulation mit dem vollständig gekoppelten Berechnungsverfahren die konstruktiven Einflüsse, wie sie in Kapitel 5 beschrieben wurden, abgebildet werden können und daß dadurch die Einflüsse konstruktiver Modifikationen im vorhinein abgeschätzt werden können.



## 2 Modellbildung – Mathematische Formulierung

Zur Berechnung der Schalltransmission durch Fenster muß zunächst eine zutreffende Modellbildung vorgenommen werden. Dabei vereint die Problematik der *Transmission* zwei grundlegende Problemfelder des Körperschalls: Dies ist zum einen die *Anregung* eines Bauteils durch Schallwellen und zum anderen die *Schallabstrahlung* eines zu Schwingungen angeregten Bauteils. Da es zu Reflexionen an der Trennfläche kommt, wird nur ein Teil des einfallenden Schalls transmittiert (s. Abb. 2.1). Die Existenz eines direkten Zusammenhangs zwischen Anregung und Abstrahlung wird deutlich, wenn man sich die Gültigkeit des Reziprozitätsprinzips der Akustik vor Augen führt: Das Verhältnis von anregender Kraft zur gemessenen Schnelle bzw. von Schalldruck zu Volumenfluß bleibt gleich, wenn man Anrege- und Empfangsort vertauscht. Es kann vorausgesetzt werden, daß das Reziprozitätsprinzip gültig ist, da die Differentialgleichungen für die lineare Akustik in den Ortsvariablen symmetrisch sind [27].

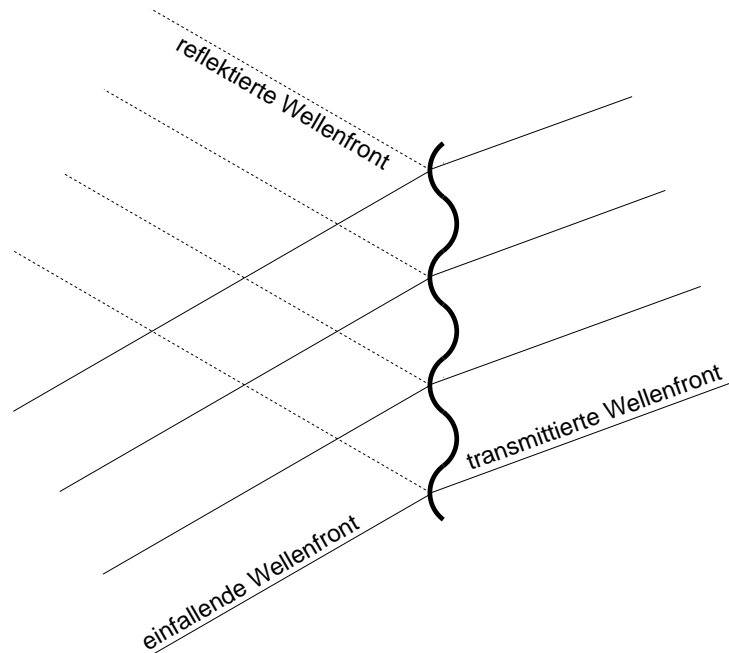


Abbildung 2.1: Schalltransmission durch eine infolge schrägen Schalleinfalls zu Biegeschwingungen angeregten unendlich ausgedehnten Platte

Für die vorliegende Problemstellung gestaltet sich das Zusammenspiel von Anregung und Abstrahlung wie folgt: Die Luft im Zimmer eines Gebäudes wird von der außen umgebenden Luft unter anderem durch die Fensterscheibe abgegrenzt. Moderne Fenster bestehen in der Regel mindestens aus Doppelverglasung mit einem luftgefüllten Scheibenzwischenraum. Dieser Hohlraum wird zur Verbesserung der schalldämmenden Wirkung teilweise auch mit speziellen Gasen gefüllt. Die Fensterscheiben sind dünne, ebene Flächentragwerke, die annähernd senkrecht zu ihren Ausdehnungsrichtungen durch den Schalldruck in der umgebenden Luft belastet und damit in Schwingungen versetzt werden. Sie können im mechanischen Sinn als Platten bezeichnet werden, die ihrerseits flächige Strahler sind, also Schall in die Umgebung abstrahlen.

Im Folgenden werden zunächst die Schallabstrahlung einer schwingenden Platte und die verschiedenen Wellentypen in Festkörpern und Fluiden betrachtet. Anschließend werden die für die vorliegende Problemstellung relevanten Grundgleichungen aus dem Hamiltonschen Prinzip entwickelt. Dieses Extremalprinzip als Ausgangspunkt zur Herleitung der allgemeinen Feldgleichungen wird der üblichen Vorgehensweise (Verwendung der Spannungs-Dehnungsbeziehungen und der dynamischen Beziehungen für das Kräftegleichgewicht) vorgezogen, da die Finite-Element-Methode für dynamische Probleme als Anwendung des Hamiltonschen Prinzips verstanden werden kann. Die Herleitungen der differentiellen Problembeschreibungen (s. Abschnitte 2.2, 2.3) sowie des Diskretisierungsverfahrens (s. Abschnitte 3.1.1, 3.1.2) basieren damit auf dem gleichen Prinzip.

## 2.1 Schallabstrahlung einer schwingenden Platte

Eine zu Schwingungen angeregte Struktur strahlt nur unter bestimmten Voraussetzungen Schall in das angrenzende Fluid ab. Unerlässlich für eine Anregung von Schallwellen im Fluid ist die Existenz einer nennenswerten transversalen Bewegung, also einer Bewegung senkrecht zur Oberfläche der Struktur. Nicht alle Wellen einer schwingenden Platte haben transversale Anteile. In Abschnitt 2.1.1 werden daher die möglichen Wellentypen auf diesen Aspekt hin untersucht.

Die zweite Größe, die die Schallabstrahlung einer schwingenden Platte maßgebend bestimmt, ist die sogenannte Grenzfrequenz oder Koinzidenzfrequenz (s. Gl. (2.9)): Liegt die Anregungsfrequenz unterhalb dieser kritischen Frequenz, so ist die Schallabstrahlung gering, oberhalb der Grenzfrequenz ist sie wesentlich größer. Diese generelle Aussage wird in Abschnitt 2.1.2 belegt und detaillierter erläutert.

### 2.1.1 Wellen in Fluiden und festen Körpern

Die Art und die Geschwindigkeit von Schallwellen ist vom Ausbreitungsmedium abhängig. Dabei unterscheidet sich die Schallausbreitung in Fluiden, wie zum Beispiel in Luft oder Wasser, von der in Festkörpern, da Gase und Flüssigkeiten in der Regel keine Schubspannungen aufnehmen können. In Fluiden tritt Schall daher nur als Dichtewelle mit longitudinaler Bewegung auf. Es ergibt sich zur Beschreibung des Schallfeldes lediglich eine skalare Wellengleichung, die in Abschnitt 2.3 hergeleitet wird.

Zur Beschreibung des Schallausbreitung in der Platte reicht im Gegensatz zum Fluid die skalare Schallfeldgröße Druck nicht aus, es müssen zusätzlich die Spannungstensoren herangezogen werden. Die Bewegungsgleichungen werden für ebene Platten im Abschnitt 2.2 hergeleitet. Vertiefte Betrachtungen der differentiellen Zusammenhänge von Körperschallausbreitung können z.B. [27] entnommen werden.

Im Folgenden werden zunächst kurz die Ausbreitungsgeschwindigkeiten der unterschiedlichen Wellentypen in Fluiden bzw. Strukturen angegeben. Detaillierte Ausführungen finden sich zum Beispiel bei Kurtze/Schmidt/Westphal [73].

### Dichtewellen

Bei den longitudinalen Dichtewellen fallen die Schwingungs- und die Ausbreitungsrichtung zusammen. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit in Festkörpern ergibt sich als Wurzel des Quotienten aus Kompressionsmodul  $K$  und Dichte  $\rho$ , wobei sich der Kompressionsmodul aus den anderen Elastizitätskonstanten durch  $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$  berechnen läßt:

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \quad (2.1)$$

In idealen Gasen ist die Schallgeschwindigkeit abhängig vom Gasdruck  $p$ , von der Gasdichte  $\rho$  und dem Isentropenexponenten  $\kappa$ , der sich aus der thermischen Zustandsgleichung und aus der spezifischen Wärmekapazität im idealen Gaszustand berechnen läßt:

$$c = \sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}} \quad (2.2)$$

Die Schallausbreitung in festen Körpern wird von der Tatsache bestimmt, daß diese tangentialen Spannungen übertragen können. Neben den rein longitudinalen Dichtewellen können folgende Wellentypen auftreten:

### Schubwellen

Schubwellen sind transversale Wellen in festen Körpern, deren Schallschnelle senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Welle steht. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Schubwelle beträgt

$$c_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad (2.3)$$

wobei mit  $\rho$  die Dichte des Materials und mit  $G$  der Schubmodul bezeichnet wird, der mit dem Elastizitätsmodul  $E$  und der Querdehnzahl  $\nu$  über die Beziehung  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  zusammenhängt.

### Torsionswellen

Wenn man lange, dünne Stäbe durch zeitlich wechselnde Torsionsmomente belastet, treten dort spezielle Schubwellen, sogenannte Torsionswellen, auf. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit dieser Wellen ist abhängig von der Form der Querschnittsfläche, da

$$c_T = \sqrt{\frac{T}{\Theta}} \quad (2.4)$$

gilt und sowohl die Torsionssteife  $T$  als auch das Massenträgheitsmoment  $\Theta$  geometrische Parameter sind. Für Stäbe mit rotationssymmetrischem Querschnitt ergibt sich die Beziehung (2.3). Für einen Stab mit Rechteckquerschnitt und einem Längen- zu Breitenverhältnis  $\frac{h}{b} > 6$  gilt näherungsweise

$$c_{T \text{ Rechteck}} = \frac{2b}{h} c_T. \quad (2.5)$$

### Dehnwellen

Die rein longitudinalen Dichtewellen treten nur in Körpern auf, die in allen Richtungen über sehr viele Wellenlängen ausgedehnt sind. In der Praxis ist allerdings die Ausdehnung des Körpers in den meisten Fällen begrenzt. Ist der zu untersuchende Körper in wenigstens einer Richtung kleiner als eine Wellenlänge einer Dichtewelle, so können sich sogenannte quasi-longitudinale oder Dehnwellen ausbilden. Dies kann zum Beispiel in Platten oder Stäben der Fall sein. Neben der longitudinalen Schnelle tritt bei der Dehnwelle zusätzlich eine Schnellekomponente in transversaler Richtung auf, die aufgrund der Querkontraktion eines schubsteifen Körpers möglich ist. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit ergibt sich aus

$$c_D = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (2.6)$$

und ist kleiner als die der zugehörigen Dichtewelle. Dies läßt sich anschaulich durch die Tatsache erklären, daß durch die seitliche Ausdehnungsmöglichkeit das Medium etwas weicher ist.

### Rayleighwellen

Rayleighwellen sind freie Oberflächenwellen, die zum Beispiel bei der Untersuchung von Bodenerschütterungen von Bedeutung sind. Sie breiten sich entlang der Oberfläche eines Mediums aus, dessen Dicke größer ist als die Wellenlänge der Dichtewelle, so daß dieses nur in eine Richtung ausweichen kann. Die Schnelle der Rayleighwelle hat sowohl eine transversale als auch eine longitudinale Komponente. Die Rayleighwelle nimmt exponentiell mit der Tiefe ab.

Allerdings spielen diese Rayleighwellen bei Schallausbreitungsvorgängen in festen Körpern eine untergeordnete Rolle.

## Biegewellen

Bei den Biegewellen tritt neben einer transversalen Bewegung zusätzlich eine Winkelbewegung auf. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist im Gegensatz zu den bisher betrachteten Wellentypen frequenzabhängig:

$$c_B = \left( \frac{B}{\rho \cdot h} \right)^{\frac{1}{4}} \sqrt[2]{\omega} \quad (2.7)$$

Die Ausbreitung von Biegewellen ist daher ein dispersiver Vorgang. Das Produkt aus Dichte  $\rho$  und Bauteildicke  $h$  in Gleichung (2.7) stellt die Masse pro Flächeneinheit dar und  $B$  ist die sogenannte Biegesteife. Für eine Kirchhoffplatte der Dicke  $h$  ist die Biegesteife mit  $B = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{h^3}{12}$  gegeben. Diese Biegewellengeschwindigkeit ergibt sich bei Verwendung der sogenannten vereinfachten Biegewellentheorie, auf die im Abschnitt 2.2.2 eingegangen wird.

Für das Problem der Schalltransmission durch plattenförmige Bauteile ist nun von Interesse, welche dieser in Körpern auftretenden Wellen eine Schallabstrahlung bewirken können. Es sind dies nur jene Wellen, die eine bedeutende transversale Bewegung aufweisen. Nur eine solche Bewegung senkrecht zur Oberfläche bewirkt eine Schalldruckänderung im Fluid. Neben den Schubwellen haben in Platten die Dehnwellen und die Biegewellen transversale Anteile. Biegewellen haben den größten Anteil an der Schallabstrahlung, insbesondere bei Anregung durch Luftschall. Bei mechanischer Anregung erhöht sich allerdings der Einfluß anderer Wellentypen. Außerdem kann die Bedeutung der Dehnwelle in bestimmten Fällen nicht unerheblich sein, da diese an Ecken und Kanten in Biegewellen übergehen können.

Für die Schallabstrahlung von Fensterscheiben ist bei Berücksichtigung dieser Eigenschaften der unterschiedlichen Wellenarten eine Beschränkung auf die Biegewellen ausreichend, da zunächst ausschließlich Einzelbauteile und nicht etwaige Wandanschlüsse untersucht werden sollen und zudem die Anregung der Fensterscheiben in der bei weitem überwiegenden Zahl der Fälle durch Luftschall erfolgt. Eine direkte Körperschallanregung z.B. durch einen Aufprall stellt ein außergewöhnliches Ereignis dar und kann deshalb für die schallschutztechnische Auslegung und damit für die Simulation der Schalltransmission vernachlässigt werden.

### 2.1.2 Grenzfrequenz, Nah- und Fernfeld

Der Einfluß der Grenzfrequenz auf die Schallabstrahlung von Platten soll zunächst für den idealisierten Fall einer unendlich ausgedehnten Platte beschrieben werden. Betrachtet man eine Struktur, in der sich Biegewellen mit der Wellenlänge  $\lambda_S$  ausbreiten, so erfolgt die Abstrahlung in das umgebende Fluid (Wellenlänge  $\lambda_F$ ) unter dem Winkel  $\alpha$ , (s. Abb. 2.2) wobei

$$\cos \alpha = \frac{\lambda_F}{\lambda_S} \quad \text{bzw.} \quad \cos \alpha = \frac{c_F}{c_S} \quad (2.8)$$

gilt. Da der Kosinus des Abstrahlwinkels nie größer als Eins werden kann, ergibt sich, daß die

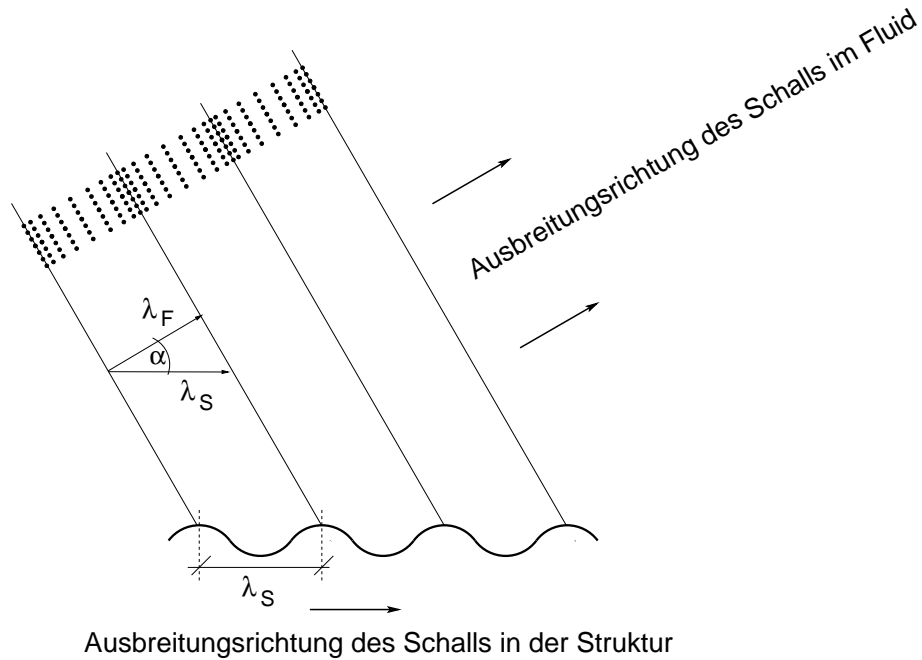


Abbildung 2.2: Schallabstrahlung einer Struktur in umgebendes Fluid infolge Körperschallausbreitung

Wellenlänge und damit auch die Ausbreitungsgeschwindigkeit in der Struktur  $c_S$  größer als die Wellenlänge bzw. Ausbreitungsgeschwindigkeit im umgebenden Medium  $c_F$  sein muß. Sind die Wellenlängen in der Struktur und im umgebenden Fluid genau gleich groß, so spricht man von der zugehörigen *Grenzfrequenz*  $f_{Gr}$  [73].

$$\begin{aligned}\lambda_F = \lambda_S &\Leftrightarrow \frac{c_F}{\omega} = \frac{c_S}{\omega} \\ \Rightarrow f_{Gr} &= \frac{c_F^2}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{\rho \cdot h}{B}}\end{aligned}\quad (2.9)$$

Die Beziehung (2.9) für die Grenzfrequenz in Abhängigkeit von der Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c_F$  im Fluid sowie der flächenbezogenen Masse ( $\rho \cdot h$ ) und der Biegesteifigkeit  $B$  der Struktur ergibt sich, wenn für die Ausbreitungsgeschwindigkeit in der Struktur  $c_S$  die Biegewellengeschwindigkeit nach Gleichung (2.7) herangezogen wird.

Das Schallfeld, welches von einer schwingenden Platte abgestrahlt wird, falls die Anregungsfrequenz oberhalb der Grenzfrequenz liegt (d.h., falls  $\lambda_S > \lambda_F$  gilt), wird als Fernfeld bezeichnet. Im Gegensatz dazu spricht man im Falle einer kleinen Wellenlänge in der Struktur im Vergleich zur Wellenlänge im umgebenden Fluid von der Ausbildung eines sogenannten Nahfeldes (s. Abb. 2.3). Bei einem Nahfeld erfolgt die Abnahme des Schalldrucks mit der Entfernung von der Platte sehr schnell, insbesondere, wenn die Differenz der Wellenlängen sehr groß ist. Die Abnahme des Schalldrucks läßt sich mit der speziellen, rotierenden Teilchenbewegung im Fluid bei Anregungen unterhalb der Grenzfrequenz begründen.

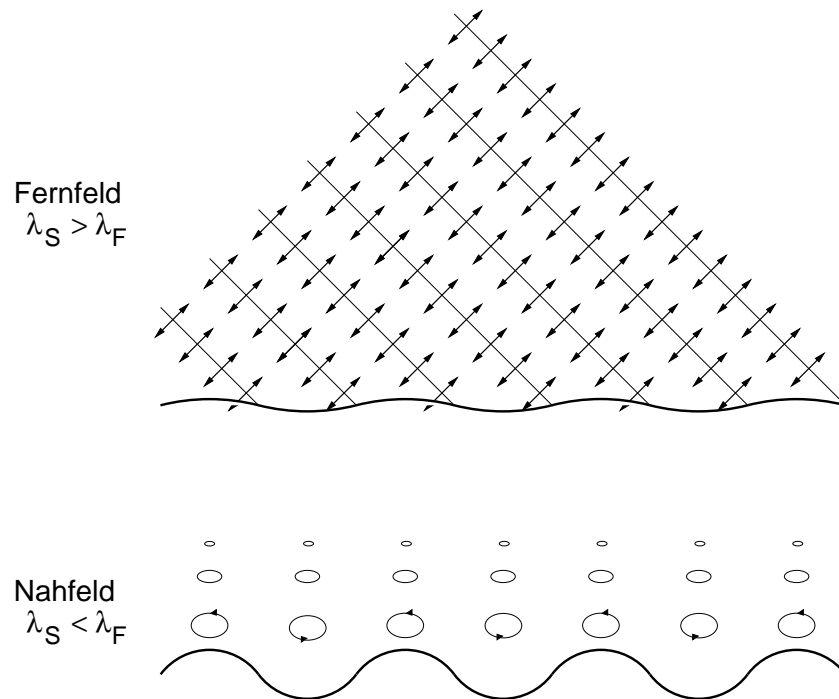


Abbildung 2.3: Teilchenbewegung bei Nahfeld- und Fernfeldabstrahlung

Wie in diesem Abschnitt einleitend erwähnt, gelten diese allgemeinen Aussagen zur Ausbildung von Schallfeldern uneingeschränkt nur für unendlich ausgedehnte Platten. In der Realität sind ausschließlich endliche Platten zu untersuchen. An den Begrenzungen dieser Platten können die kurzen Körperschallwellen reflektiert werden und zurücklaufen, wodurch sie neben den Nahfeldeffekten zusätzlich Fernfeldeffekte, d.h. Abstrahlung in die Umgebung bewirken (s. Abb. 2.4). Allerdings ist diese Abstrahlung bei Anregung unterhalb der Grenzfrequenz geringer als die Schallabstrahlung bei Anregung oberhalb der Grenzfrequenz, wo die reinen Fernfeldeffekte überwiegen. Sie hängt jedoch wegen der unterschiedlich starken Reflektionsmöglichkeiten von der Art der Lagerung ab.

Die Bewertung der schalldämmenden Eigenschaften von trennenden Bauteilen wird bei der Anwendung der vorgestellten Methode im Abschnitt 6 unter diesen Gesichtspunkten differenziert betrachtet.

## 2.2 Schwingungen ebener Platten

Die Bewegungsgleichungen eines mechanischen Systems lassen sich bekanntermaßen durch Differentialgleichungen angeben. Daneben können sie allerdings auch in Form einer Extremalaussage formuliert werden. Dies erweist sich häufig als vorteilhaft, weil diese Formulierung einfach und unabhängig von den gewählten Koordinaten ist. So besagt das Hamiltonsche Extremalprinzip, daß eine nach den Gesetzen der Mechanik ablaufende Bewegung eines Systems

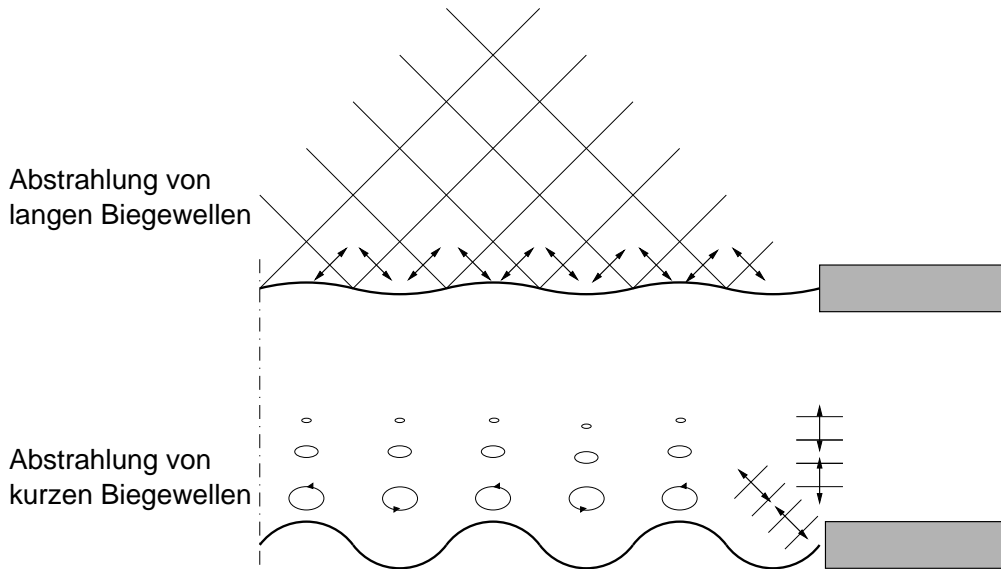


Abbildung 2.4: BiegeWellenabstrahlung einer halbunendlichen Platte

sich dadurch auszeichnet, daß das Zeitintegral der Lagrangeschen Funktion  $L$  zwischen zwei Lagen des Systems einen stationären Wert annimmt [65]. Für konservative Kräfte ist die Lagrangesche Funktion die Differenz von kinetischer  $E_{kin}$  und potentieller Energie  $E_{pot}$ , so daß das Hamiltonsche Prinzip wie folgt formuliert werden kann

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} (E_{kin} - E_{pot}) dt = 0 \quad , \quad (2.10)$$

für Systeme bei denen auch potentiallose Kräfte wichtig sind, ergibt sich

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (E_{kin} - E_{pot} + W) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} (E_{kin} - E_{pot}) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W dt = 0 \quad . \quad (2.11)$$

Mit  $W$  wird dabei die Arbeit bezeichnet, die durch nicht-konservativen Kräfte (z.B. äußere oder Reibungskräfte) erzeugt wird.

Das Hamiltonsche Prinzip kann auf kontinuierliche sowie diskrete Systeme angewendet werden, so daß es wie hier auf die beschreibende Differentialgleichung oder wie in Abschnitt 3.1.1 auf die Finite-Element Formulierung führt.

Die Energieanteile einer Platte der Dicke  $h$  mit den Belastungen  $p, p_{xy}$  und  $p_{yz}$  lassen sich durch die Feldgrößen  $\xi, \eta$  und  $\zeta$  unter Berücksichtigung der in Abb. 2.5 dargestellten Vorzeichendefinitionen ausdrücken, wobei die resultierenden Belastungen durch

$$p_B = p^+ - p^-, \quad p_2 = p_{yz}^- - p_{yz}^+, \quad p_4 = p_{xy}^- - p_{xy}^+$$

zusammengefaßt werden können.

Zunächst ergeben sich damit die Energieanteile sowie der Anteil der von außen zugeführten Arbeit wie folgt:





$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} + \nu \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) & \epsilon_x &= \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \xi_M}{\partial x} + y \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\
\sigma_z &= \frac{E}{1-\nu^2} \left( \nu \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) & \epsilon_z &= \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{\partial \zeta_M}{\partial z} + y \frac{\partial \varphi_z}{\partial z} \\
\tau_{xy} &= \tau_{yx} = G \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) & \gamma_{xy} &= \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} = \varphi_x + \frac{\partial \eta}{\partial x} \\
\tau_{yz} &= \tau_{zy} = G \left( \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) & \gamma_{yz} &= \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial z} = \varphi_z + \frac{\partial \eta}{\partial z} \\
\tau_{xy} &= \tau_{yx} = G \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) & \gamma_{xz} &= \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial \xi_M}{\partial z} + y \frac{\partial \varphi_x}{\partial z} + \frac{\partial \zeta_M}{\partial x} + y \frac{\partial \varphi_z}{\partial x}
\end{aligned}$$

Mit diesen Spannungen und Dehnungen kann die potentielle Energie durch die Verschiebungen der Mittelebene bzw. Rotationen und ihre Ortsableitungen ausgedrückt werden. Die Gleichung (2.16) erhält man, wenn außerdem die Integration über die Plattendicke durchgeführt wird.

$$\begin{aligned}
E_{pot} &= \frac{1}{2} \frac{Eh}{(1-\nu^2)} \iint (\xi_{M,x}^2 + 2\nu \xi_{M,x} \zeta_{M,z} + \zeta_{M,z}^2) dx dz + \frac{Gh}{2} \iint (\xi_{M,z} + \zeta_{M,x})^2 dx dz \\
&+ \frac{1}{2} \frac{Eh}{(1-\nu^2)} \frac{h^2}{12} \iint \left( \varphi_{x,x}^2 + 2\nu \varphi_{x,x} \varphi_{z,z} + \varphi_{z,z}^2 + \frac{1-\nu}{2} (\varphi_{x,z} + \varphi_{z,x})^2 \right) dx dz \\
&+ \frac{Gh}{2} \iint \left( (\varphi_x + \eta_{,x})^2 + (\varphi_z + \eta_{,z})^2 \right) dx dz \quad (2.16)
\end{aligned}$$

Die Variation der Gleichungen (2.14), (2.15) sowie (2.16) liefert ein System von Differentialgleichungen, das die Schwingungen einer ebenen Platte vollständig beschreibt. Das System ergibt sich, wie in den Gleichungen (2.17)–(2.21) angegeben, wenn die Variationen und einige Umformungen durchgeführt werden. Die Differentialgleichungen für die „in-plane“ Wellen sind dabei in den ersten beiden Gleichungen geben, wobei Gl. (2.17) die Dehnwellen und Gl. (2.18) die Schubwellen beschreiben. Die restlichen drei Gleichungen repräsentieren die differentielle Beschreibung der Biegebewegung einer ebenen Platte infolge Querkraft (2.19) und Biegemomenten (2.20, 2.21).

$$\delta \xi_M : \quad \rho \ddot{\xi}_M - \left[ \frac{E}{1-\nu^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \xi_M - \frac{1+\nu}{1-\nu} G \frac{\partial^2 \zeta_M}{\partial x \partial z} = \frac{p_2}{h} \quad (2.17)$$

$$\delta \zeta_M : \quad -\frac{1+\nu}{1-\nu} G \frac{\partial^2 \xi_M}{\partial x \partial z} + \rho \ddot{\zeta}_M - \left[ \frac{E}{1-\nu^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + G \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \zeta_M = \frac{p_4}{h} \quad (2.18)$$

$$\delta\eta: \quad \rho h \ddot{\eta} - Gh \Delta \eta - Gh \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} - Gh \frac{\partial \varphi_z}{\partial z} = p_B \quad (2.19)$$

$$\delta\varphi_x: \quad Gh \frac{\partial \eta}{\partial x} + \rho I \ddot{\varphi}_x + \left[ G \left( h - I \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right] \varphi_x - \frac{1+\nu}{2} B \frac{\partial^2 \varphi_z}{\partial x \partial z} = 0 \quad (2.20)$$

$$\delta\varphi_z: \quad Gh \frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{1+\nu}{2} B \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x \partial z} + \rho I \ddot{\varphi}_z + \left[ G \left( h - I \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) - B \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \varphi_z = 0 \quad (2.21)$$

Wie in Abschnitt 2.1 erläutert, sind die „in-plane“ Wellen von untergeordneter Bedeutung für die Abstrahlung von Schall einer einzelnen, ebenen Platte und werden deshalb im Gegensatz zu den Biegewellen im weiteren nicht vertieft betrachtet.

Formt man die Gleichungen für die Biegebewegung in eine Differentialgleichung höherer Ordnung um, so erhält man die Biegewellengleichung nach Timoshenko-Mindlin in der bekannten Form, auf die im folgenden Abschnitt näher eingegangen wird. Bei Vernachlässigung der Terme infolge Rotationsträgheit und endlicher Schubsteife ergibt sich die Biegewellengleichung nach Kirchhoff (Abschnitt 2.2.2).

### 2.2.1 Biegewellengleichung nach Timoshenko-Mindlin

Die Gleichungen (2.19)–(2.21), welche die Biegebewegung der Platte beschreiben, werden zu einer Differentialgleichung vierter Ordnung zusammengefaßt, indem die Biegewinkel  $\varphi_x$  und  $\varphi_y$  eliminiert werden:

$$B \Delta \Delta \eta - \left( \frac{B\rho}{G} + \rho I \right) \Delta \ddot{\eta} + \rho h \ddot{\eta} + \rho I \frac{\rho}{G} \ddot{\ddot{\eta}} = p_B - \frac{B}{Gh} \Delta p_B + \frac{\rho I}{Gh} \ddot{p}_B \quad (2.22)$$

Die Biegewellengleichung (2.22) für den 2-dimensionalen Fall ist auf der Theorie von Mindlin begründet. Im 1-dimensionalen Fall geht die entsprechende Gleichung auf Timoshenko zurück. Die Beschreibung der Mindlin-Platte enthält Terme, die eine endliche Schubsteife berücksichtigen. Dies sind jene Terme, die den Schubmodul  $G$  enthalten. Daneben wird durch Gleichung (2.22) die Rotationsträgheit berücksichtigt und zwar durch jene Terme, in die der Querschnittsparameter  $I$  eingeht.

### 2.2.2 Biegewellengleichung nach Kirchhoff

Die Biegewellengleichung nach Timoshenko-Mindlin läßt sich vereinfachen, wenn Schub und Rotationsträgheit unberücksichtigt bleiben:

$$B \Delta \Delta \eta + \rho h \ddot{\eta} = p_B \quad (2.23)$$

Diese Biegewellengleichung (2.23) ist auf Kirchhoff zurückzuführen. Ihr liegt die Annahme zugrunde, daß bei dünnen Platten von unendlicher Schubsteife ausgegangen werden kann und die Rotationsträgheit des Plattenquerschnitts vernachlässigbar ist.

Diese zeitabhängige Differentialgleichung läßt sich, wenn man von einer periodischen Anregung  $\hat{p}_B(\mathbf{x})e^{i\omega t}$  ausgeht, mit Hilfe des harmonischen Zeitansatzes

$$\eta(\mathbf{x}, t) = \hat{\eta}(\mathbf{x})e^{i\omega t} \quad (2.24)$$

in die frequenzabhängige Gleichung der eingeschwungenen Struktur

$$B\Delta\Delta\hat{\eta}(\mathbf{x}) - \rho h \cdot \omega^2 \hat{\eta}(\mathbf{x}) = \hat{p}_B \quad (2.25)$$

überführen.

### Anmerkungen zur Genauigkeit der Kirchhofftheorie

Durch die vereinfachenden Annahmen, die der Kirchhofftheorie zugrunde liegen, kann diese Theorie nicht in jedem Fall exakt die gleichen Ergebnisse liefern wie eine Berechnung nach der Biegewellentheorie von Timoshenko-Mindlin. Daher sollen die Größe möglicher Abweichungen bzw. die Genauigkeit dieser Theorien im Folgenden kurz analysiert werden. Dazu wird die harmonische Schwingung in eine Richtung betrachtet. Ziel dieser Überlegungen ist die Angabe einer maximal möglichen Bauteildicke, bei der für die vorliegende Problemstellung der Fehler bei Verwendung der vereinfachten Biegewellentheorie nach Kirchhoff eine zu definierende Schranke nicht überschreitet.

Nach Einsetzen des harmonischen Zeitansatzes

$$\eta \sim e^{i\omega t} e^{-ik_k x} \quad (2.26)$$

in die homogene Form der beschreibenden Differentialgleichung (2.22) erhält man die folgende Dispersionsgleichung

$$k_k^4 - \omega^2 k_k^2 \left( \frac{\rho}{G} + \frac{\rho(1-\nu^2)}{E} \right) - k_B^4 + \omega^4 \frac{\rho}{G} \frac{\rho(1-\nu^2)}{E} = 0 \quad , \quad (2.27)$$

wobei mit  $k_B$  die freie Wellenzahl der Biegewelle bezeichnet wird, die den Quotient aus Kreisfrequenz  $\omega$  und der Biegewellengeschwindigkeit  $c_B$  nach Gleichung (2.7) bildet. Mit  $k_k$  bzw.  $c_k$  wird die korrigierte Wellenzahl bzw. Wellengeschwindigkeit für dicke Platten nach Timoshenko-Mindlin bezeichnet. Damit läßt sich die vorherige Gleichung wie folgt schreiben:

$$\frac{1}{c_k^4} - \frac{1}{c_k^2} \left( \frac{\rho}{G} + \frac{\rho(1-\nu^2)}{E} \right) - \frac{1}{c_B^4} + \frac{\rho}{G} \frac{\rho(1-\nu^2)}{E} = 0 \quad (2.28)$$

Die Quotienten  $\frac{\rho}{G}$  bzw.  $\frac{\rho}{E}$  stellen die Kehrwerte der Quadrate von Dehn- bzw. Schubwellengeschwindigkeit dar. Diese Größen sind klein im Vergleich zur Biegewellengeschwindigkeit, so daß deren Produkt, d.h. der letzte Summand vernachlässigt werden kann. Nach Multiplikation mit  $c_B^4 c_k^4$  ergibt sich (2.28) in der Form

$$c_k^4 + c_k^2 \cdot c_B^4 \left( \frac{\rho}{G} + \frac{\rho(1-\nu^2)}{E} \right) - c_B^4 = 0 \quad . \quad (2.29)$$

Substituiert man hier  $c_k^2$  durch  $C$ , so ergibt sich eine quadratische Gleichung für die Hilfsgröße  $C$

$$C^2 + C \cdot c_B^4 \left( \frac{\rho}{G} + \frac{\rho(1-\nu^2)}{E} \right) - c_B^4 = 0 \quad (2.30)$$

mit den Lösungen

$$C_{1,2} = -\frac{c_B^4 \left( \frac{\rho}{G} + \frac{\rho(1-\nu^2)}{E} \right)}{2} \pm \sqrt{\frac{c_B^8 \left( \frac{\rho}{G} + \frac{\rho(1-\nu^2)}{E} \right)^2}{4} + c_B^4} \quad (2.31)$$

Wegen der Größenordnungen von Moduln und Dichte ist hier wiederum der erste Summand unter der Wurzel vernachlässigbar. Damit ergibt sich durch Rücksubstitution die folgende Beziehung zwischen der Biegewellengeschwindigkeit  $c_B$  und der Geschwindigkeit der korrigierten Biegewelle  $c_k$ :

$$c_k^2 = c_B^2 \left[ -\frac{1}{2} c_B^2 \left( \frac{\rho}{G} + \frac{\rho(1-\nu^2)}{E} \right) \pm 1 \right] \quad (2.32)$$

In dieser Gleichung bestimmt der Term  $-\frac{1}{2} c_B^2 \left( \frac{\rho}{G} + \frac{\rho(1-\nu^2)}{E} \right)$ , in welchem Maße das Quadrat der Biegewellengeschwindigkeit  $c_B$  von der korrigierten Geschwindigkeit  $c_k$  abweicht, so daß dieser näherer Betrachtung bedarf. Damit die Summe in der Klammer einen positiven Wert annimmt, muß zum ersten Summanden, der immer negativ ist, 1 addiert werden. Das negative Vorzeichen ist physikalisch nicht sinnvoll und kann daher vernachlässigt werden.

Der Ausdruck  $-\frac{1}{2} c_B^2 \left( \frac{\rho}{G} + \frac{\rho(1-\nu^2)}{E} \right)$  wird nun zunächst mit  $c_B$  erweitert und die Definition (2.7) verwendet.

$$\frac{1}{2} c_B^2 \left( \frac{\rho(1-\nu^2)}{E} + \frac{\rho}{G} \right) \cdot \frac{c_B^2}{c_B^2} = \frac{1}{2} \frac{B}{\rho \cdot h} \omega^2 \left( \frac{\rho(1-\nu^2)}{E} + \frac{\rho}{G} \right) \frac{1}{c_B^2} \quad (2.33)$$

Wenn in dieser Gleichung die Biegesteifigkeit  $B$  und der Schubmodul  $G$  in Abhängigkeit von Elastizitätsmodul, Querkontraktionszahl und Bauteildicke ausgedrückt werden, ergibt sich die folgende Beziehung:

$$\frac{1}{2} \frac{1}{\rho h} \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \omega^2 \left( \frac{\rho(1-\nu^2)}{E} + \frac{\rho(2(1+\nu))}{E} \right) \frac{1}{c_B^2} = \frac{1}{2} \frac{h^2}{12} \frac{(3+2\nu-\nu^2)}{(1-\nu^2)} \cdot \frac{\omega^2}{c_B^2} \quad (2.34)$$

Da die Biegewellenlänge den Quotienten aus Schallgeschwindigkeit und Frequenz darstellt, kann der Ausdruck (2.34) geschrieben werden als

$$\frac{(2\pi)^2}{24} \frac{(3+2\nu-\nu^2)}{(1-\nu^2)} \cdot \left( \frac{h}{\lambda_B} \right)^2, \quad (2.35)$$

wobei er sich für die Grenzfälle  $\nu = 0$  bzw.  $\nu = 0.5$  zu

$$\approx 4,9 \cdot \left( \frac{h}{\lambda_B} \right)^2 \quad \text{bzw.} \quad \approx 8,2 \cdot \left( \frac{h}{\lambda_B} \right)^2 \quad (2.36)$$

und für den Wert der Querkontraktionszahl von Glas ( $\nu = 0,24$ ) zu

$$\frac{(2\pi)^2}{24} \cdot \frac{(3 + 2 \cdot 0,24)}{(1 - 0,24^2)} \cdot \left(\frac{h}{\lambda_B}\right)^2 \approx 6,0 \cdot \left(\frac{h}{\lambda_B}\right)^2 \quad (2.37)$$

ergibt. Durch Einsetzen in die Beziehung zwischen den Quadraten der Schallwellengeschwindigkeit (vgl. Gl. (2.32)) erhält man im allgemeinen Fall:

$$c_k^2 = c_B^2 \left[ -\frac{(2\pi)^2}{24} \frac{(3 + 2\nu - \nu^2)}{(1 - \nu^2)} \cdot \left(\frac{h}{\lambda_B}\right)^2 + 1 \right] \quad (2.38)$$

Für  $\nu = 0$  bzw.  $\nu = 0,5$  gilt

$$c_k^2 = c_B^2 \left[ -4,9 \left(\frac{h}{\lambda_B}\right)^2 + 1 \right] \quad \text{bzw.} \quad c_k^2 = c_B^2 \left[ -8,2 \left(\frac{h}{\lambda_B}\right)^2 + 1 \right] \quad (2.39)$$

und damit

$$c_k = c_B \sqrt{-4,9 \left(\frac{h}{\lambda_B}\right)^2 + 1} \quad \text{bzw.} \quad c_k = c_B \sqrt{-8,2 \left(\frac{h}{\lambda_B}\right)^2 + 1} \quad (2.40)$$

Demnach tritt für diesen Fall höchstens eine 10%-ige Abweichung zwischen Biegewellengeschwindigkeit und der korrigierten Geschwindigkeit auf, wenn der folgende Zusammenhang zwischen der Biegewellenlänge  $\lambda_B$  und der Bauteildicke  $h$  besteht:

$$0,9 < \sqrt{-4,9 \left(\frac{h}{\lambda_B}\right)^2 + 1} \quad \text{bzw.} \quad 0,9 < \sqrt{-8,2 \left(\frac{h}{\lambda_B}\right)^2 + 1} \quad (2.41)$$

$$\lambda_B > 5,08 \cdot h \quad \text{bzw.} \quad \lambda_B > 6,57 \cdot h \quad (2.42)$$

Verwendet man die Beziehung (2.37) so erhält man eine Bedingung für die maximal mögliche Glasscheibendicke bei Verwendung der Kirchhofftheorie:

$$h < \frac{\lambda_B}{5,62} \quad (2.43)$$

Dieser Wert für das Verhältnis von Biegewellenlänge und Bauteildicke liegt im Bereich, den auch Cremer/Heckl in [27] angeben.

### Nachweis der Anwendbarkeit für Schalltransmissionsprobleme durch Fensterscheiben

Es ist nun nachzuweisen, daß die Bedingung (2.43) für übliche Fensterscheiben im bauakustisch relevanten Frequenzbereich erfüllt ist, d.h., daß die Kirchhofftheorie für Schalltransmissionsprobleme durch Glasplatten anwendbar ist. Mit den Materialdaten von handelsüblichem Glas

$$\begin{aligned} E &= 6,32 \cdot 10^9 \frac{N}{m^2} \\ \nu &= 0,24 \\ \rho &= 2300 \frac{kg}{m^3} \end{aligned}$$

ergibt sich die Biegewellengeschwindigkeit nach Gleichung (2.7) zu

$$c_B = \left( \frac{6,32 \cdot 10^9 \cdot h^3}{12(2300 \cdot h)} \cdot \frac{1}{(1 - 0,24^2)} \right)^{\frac{1}{4}} \sqrt[2]{\omega} = 22,2 \cdot \sqrt{\omega \cdot h} \quad (2.44)$$

Eingesetzt in die Bedingung (2.43) folgt

$$\lambda_B = \frac{c_B 2\pi}{\omega} = 22,2 \cdot 2\pi \cdot \sqrt{\frac{h}{\omega}} > 5,62 \cdot h \quad (2.45)$$

$$616,0 \cdot \frac{1}{\omega} > h \quad (2.46)$$

Wie später erläutert wird (vgl. Abb. 5.2), kann ein Frequenzbereich von 100 bis 3200 Hz eingegrenzt werden, der für bauakustische Problemstellungen von Bedeutung ist. Daher ergibt sich als maximale Bauteildicke, für die die Abweichung der Biegewellengeschwindigkeit gegenüber der korrigierten Biegewelle kleiner als 10 % ist, ein Wert von 0,03m:

$$\lambda_B = 616,0 \cdot \frac{1}{3200 \cdot 2\pi} = 0,03m > h \quad (2.47)$$

Da Glasscheiben in der Regel eine Dicke von 15 mm nicht überschreiten, ist die Anwendbarkeit der Kirchhofftheorie für die vorliegende Problemstellung nachgewiesen. Es muß nicht auf die Theorie von Timoshenko-Mindlin zurückgegriffen werden.

### 2.2.3 Eigenschwingungen von Platten

Bei der Untersuchung des akustischen Verhaltens schwingender Platten ist die Kenntnis der Eigenfrequenzen der Struktur und der zugehörigen Moden von großer Bedeutung. Im Bereich der Resonanzen strahlt eine schwingende Platte besonders viel Schall ab. Betrachtet man Transmissionsvorgänge, so ist die Platte an diesen ausgewiesenen Frequenzen besonders „durchlässig“.

Im folgenden werden daher die Eigenfrequenzen für quadratische bzw. Rechteckplatten angegeben. Da es eine Vielzahl unterschiedlicher Kombinationen von Lagerungsbedingungen für die verschiedenen Kanten der Platte gibt, ist eine Beschränkung auf die beiden häufigsten Lagerungen - an allen vier Kanten eingespannt oder gelenkig gelagert - sinnvoll.

Für eine allseitig gelenkig gelagerte Rechteckplatte lassen sich die Eigenfrequenzen der Biegeschwingungen zu

$$\omega = \sqrt{\frac{B}{\rho h}} \cdot \left[ \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] \quad (2.48)$$

für  $m, n = 0, 1, 2, \dots$  angeben [75].

Die Eigenfrequenzen der allseitig eingespannten Rechteckplatte kann abhängig vom Verhältnis der Kantenlängen  $a/b$  Tabelle 2.1 entnommen werden.

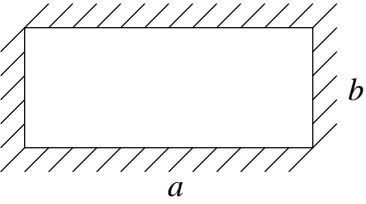
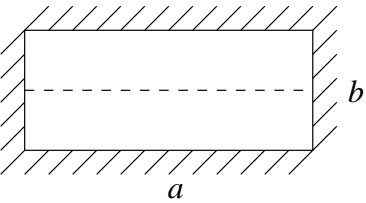
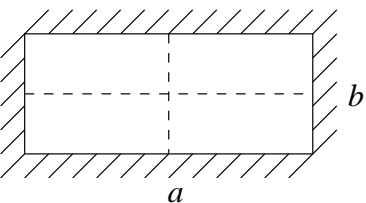
Mode		$\omega b^2 \sqrt{\frac{\rho \cdot h}{B}}$					
		$\frac{a}{b}=1$	1,5	2	2,5	3	$\infty$
1		35,10	27,00	24,56	23,76	23,19	22,37
2		72,90	67,58	65,41	64,49	64,02	61,78
3		107,47	81,57	72,66	68,89	66,96	61,78
	$\vdots$			$\vdots$			

Tabelle 2.1: Eigenfrequenzen  $\omega$  der vierseitig eingespannten Rechteckplatte [75]

### 2.2.4 Visko-elastische Dämpfung von Platten

Eine zu Schwingungen angeregte Platte strahlt weniger Schall in die Umgebung ab, wenn ein Teil der Energie aufgrund von Dämpfung in der Platte dissipiert, d.h., wenn z.B. mechanische Energie in Wärme umgesetzt wird [78]. Den wichtigsten Mechanismus stellt dabei die innere Dämpfung infolge visko-elastischen Materialverhaltens dar, wie sie zum Beispiel bei Polymeren und Gläsern auftritt. Die visko-elastische Dämpfung ist dabei auf den molekularen Aufbau dieser Materialien zurückzuführen [84].

So bestehen Polymere aus langen, organischen Ketten, die sich durch Bindungen mehrerer Kohlenstoffatome untereinander mehrfach verzweigen können (s. Abb. 2.6). Kommt es durch plötzliche Belastungen zu Verformungen der Polymerketten, so resultiert die Dämpfung aus Relaxationsprozessen in dem visko-elastischen Material: Einzelne Kettensegmente der Moleküle sind zwischen den Vernetzungs- und Verschlaufungspunkten beweglich und wechseln deshalb bei einer plötzlichen Verformung ihren Platz. Die Relaxation begründet sich nun in der endlichen Zeit, die Kettensegmente für einen Platzwechsel benötigen. Dieser Platzwechsel dient bei einer Störung des Gleichgewichts aufgrund einer plötzlichen Verformung zur Erlangung eines neuen Gleichgewichtszustandes.



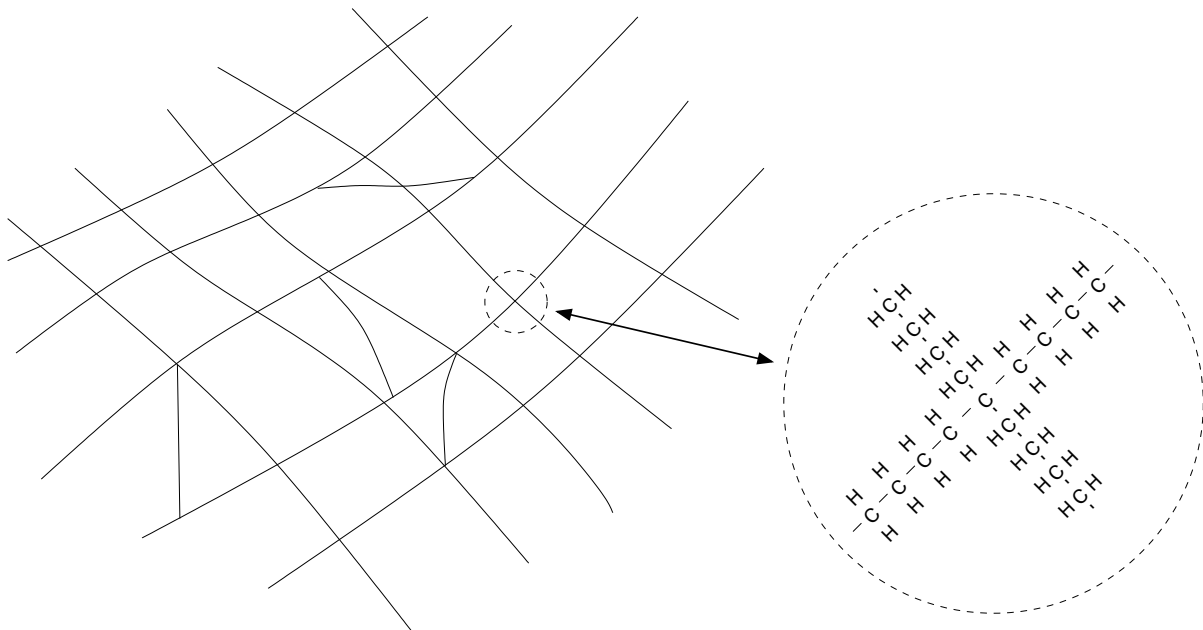


Abbildung 2.6: Typische Netzstruktur eines Polymers [84]

Nicht unerwähnt bleiben darf in diesem Zusammenhang, daß die Materialeigenschaften von Polymeren, insbesondere auch die Dämpfungseigenschaften, neben einer Frequenzabhängigkeit vor allem eine starke Temperaturabhängigkeit aufweisen. Es zeigt sich nur in einem bestimmten Temperaturbereich visko-elastisches Materialverhalten, in dem die Moleküle ausreichend beweglich sind, d.h. oberhalb der sogenannte Übergangs- oder Einfriertemperatur. Unterhalb dieser Temperatur sind die Kettensegmente fest gebunden, nur bei höheren Temperaturen ist ausreichende Beweglichkeit vorhanden. Nimmt die Temperatur weiter zu, so lösen sich allmählich die Verschlaufungen und Vernetzungen und die Stoffe zeigen plastisches Fließen. Daher kommt der speziellen Mischung von Stoffen eine große Bedeutung zu, damit die gewünschten Eigenschaften des Materials eingestellt werden können [85].

Im Gegensatz zu Polymeren bestehen Gläser nicht aus langen Ketten sondern unregelmäßigen Gittern (s. Abb. 2.7). Die innere Dämpfung ist jedoch wie bei den Polymeren auf Relaxation nach einer Deformation zurückzuführen.

Bevor auf die Dämpfung von BiegeWellen in Kirchhoffplatten näher eingegangen wird, werden zunächst einige einfache Dämpfungsmodelle beschrieben.

### Dämpfungsmodelle

Das einfachste Modell zur Beschreibung von Dämpfungsmechanismen besteht in der Annahme eines frequenzunabhängigen Verlustfaktors (Modell der konstanten Hysterese). Da in der Natur jedoch häufig eine starke Frequenzabhängigkeit von inneren Verlusten zu beobachten ist, sind andere Modelle entwickelt worden, die dieser Tatsache Rechnung tragen. In diesem Zusammenhang sind die z.B. Modelle von Voigt-Kelvin oder Maxwell zu nennen. Beide Modelle lassen sich als Kombination elastischen Materialverhaltens, das durch eine Feder symbolisiert

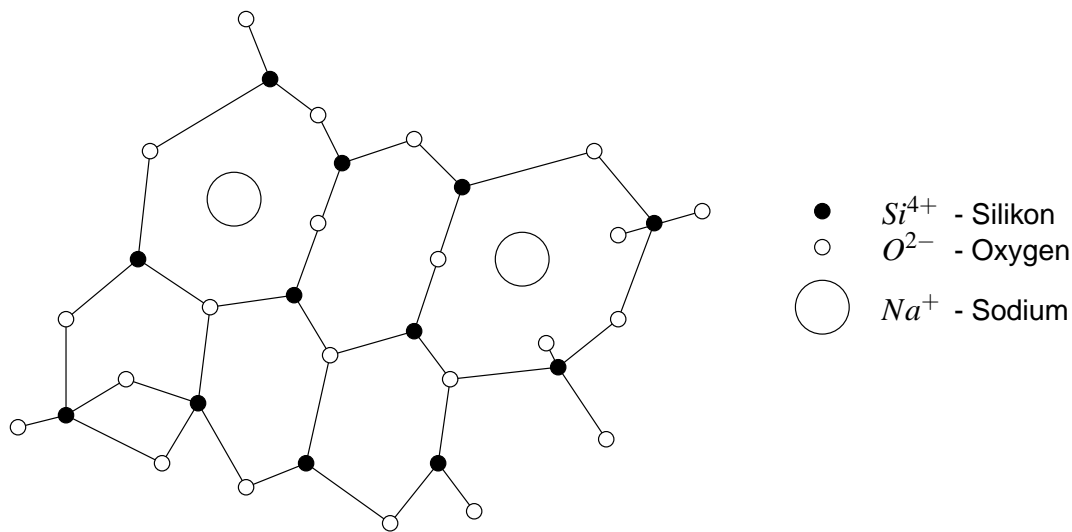


Abbildung 2.7: Typische Glasstruktur eines Natrium-Silikat-Glases [84]

werden kann, und dem Verhalten eines viskosen Fluids, daß durch einen Dämpfer symbolisiert werden kann, interpretieren.

So kann das *Voigt-Kelvin Modell* auf eine Parallelschaltung von Feder und Dämpfer zurückgeführt werden (vgl. Abb. 2.8(a)), woraus die Bedingung resultiert, daß sich die gesamte Spannung aus den Spannungen in der Feder und in dem Dämpfer zusammensetzt. Damit beruht es auf der Vorstellung, daß zusätzlich zu den elastischen Kräften eine Dämpfungskraft anzusetzen ist, die proportional zu der zeitlichen Ableitung der Dehnung ist, so daß sich das Werkstoffgesetz in der Form

$$\sigma = D \left( \varepsilon + \vartheta \frac{d\varepsilon}{dt} \right) \quad (2.49)$$

bzw. für periodischen Dehnungsverlauf ( $\varepsilon = \hat{\varepsilon} \cos \omega t$ ) in der Form

$$\sigma = D \hat{\varepsilon} (\cos \omega t - \omega \vartheta \sin \omega t) \quad (2.50)$$

schreiben läßt.

Das *Modell von Maxwell* ist das einfachste Modell zur Beschreibung von Fließvorgängen. Als Ersatzschaltbild für dieses Zweiparametermodell kann eine Reihenschaltung von Feder und Dämpfer dienen (vgl. Abb. 2.8(b)). Daraus läßt sich die Bedingung ableiten, daß die gesamte Dehnung aus den Dehnungen der Feder und denen des Dämpfers zusammengesetzt ist. Damit ergibt sich die Spannungs-Dehnungsbeziehung zu

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{D} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{1}{\nu} \sigma, \quad (2.51)$$

wobei sich eine zusätzliche Abhängigkeit von der Zähigkeit  $\nu$  des Materials ergibt.

Sowohl das Voigt-Kelvin als auch das Maxwellmodell weisen physikalische Defekte auf, die in der Literatur hinreichend beschrieben sind und auf die daher hier nicht näher eingegangen wird. Um diese Defekte zu beheben, müssen Mehrparametermodelle herangezogen werden.

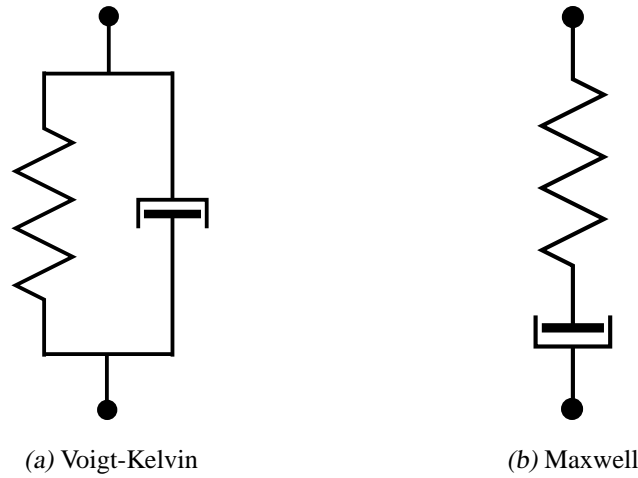


Abbildung 2.8: Rheologische Darstellungen einfacher Dämpfungmodelle [88]

Neben der oben gewählten Darstellung können die Spannungs-Dehnungsbeziehung auch mittels Gedächtnisintegralen (Faltungsintegralen) dargestellt werden. Diese Integraldarstellungen gehen auf *Boltzmann* zurück. Man geht dabei davon aus, daß sich die Wirkungen der früheren Dehnungen vom Belastungsbeginn  $\tau$  bis zur aktuellen Zeit  $t$  überlagern. Das Werkstoffgesetz für den dreidimensionalen Fall lautet damit

$$\varepsilon_{ij}(t) = \int_0^t J_{ijkl}(t - \tau) \frac{d\sigma_{kl}(\tau)}{d\tau} d\tau \quad . \quad (2.52)$$

Wesentlich für die Modellbildung ist die Wahl der sogenannten Kriechfunktion  $J_{ijkl}$ , die z.B. auf ein Zwei- oder Mehrparametermodell führt.

### Komplexe Biegesteifigkeit bei gedämpften Plattenschwingungen

Durch den vorherigen Abschnitt wird deutlich, daß es bei Berücksichtigung von Dämpfung zu komplexen Zusammenhängen zwischen den Spannungen und Dehnungen kommt. Ein Hilfsmittel bei der Modellbildung stellt dabei im Frequenzbereich die Verwendung von komplexen Moduln dar. Wenn man sich auf harmonische Vorgänge beschränkt und die komplexe Schreibweise verwendet, so können die Spannungs-Dehnungsbeziehungen in der folgenden Form angegeben werden:

$$\sigma(t) = \Re\{\underline{D} \hat{\varepsilon} e^{i\omega t}\} = D' \hat{\varepsilon} \cos \omega t - D'' \hat{\varepsilon} \sin \omega t \quad (2.53)$$

In dieser Gleichung wird mit  $\underline{D}$  der komplexe Elastizitätsmodul bezeichnet, der vom Verlustfaktor  $\eta$  abhängig ist:

$$\underline{D} = D' + iD'' = D(1 + i\eta) \quad (2.54)$$

Durch eine physikalische Interpretation der Verwendung von komplexen Moduln wird die Bedeutung im Zusammenhang mit gedämpften Schwingungen deutlich: Ein komplexer Modul

kann die exponentielle Abnahme einer ebenen, fortschreitenden Welle ausdrücken, da er auf eine komplexe Wellengeschwindigkeit und damit komplexe Wellenzahlen führt. Setzt man in der folgenden Gleichung die komplexe Wellenzahl ein, so gilt für eine gedämpfte ebene Welle, die in positiver x-Richtung fortschreitet

$$u(x, t) = \Re(\hat{u} e^{i\omega t - ik'x - k''x}) = |\hat{u}| e^{-k''x} \cos(\omega t - k'x + \varphi) \quad (2.55)$$

mit exponentieller Abnahme.

Der Imaginär- und Realteil des komplexen Elastizitätsmoduls und damit auch deren Verhältnis - der Verlustfaktor - ist vom gewählten Modell zur Beschreibung der Dämpfung abhängig. In Tabelle 2.2 sind sie für einen als konstant angenommenen Verlustfaktor, für das Modell von Voigt-Kelvin, Maxwell und ein 3-Parameter-Modell angegeben. Für eine detaillierte Herleitung und Diskussion der Vor- und Nachteile der einzelnen Modelle sei auf die Literatur verwiesen [41].

	$D'$	$D''$	$\eta$
konstanter Verlustfaktor $\eta_0$	$D$	$\eta_0 D$	$\eta_0$
Voigt-Kelvin	$D$	$D\omega\vartheta$	$\omega\vartheta$
Maxwell	$D \frac{\omega^2 \nu^2 / D^2}{1 + \omega^2 \nu^2 / D^2}$	$D \frac{\omega \nu / D}{1 + \omega^2 \nu^2 / D^2}$	$\frac{D}{\omega \nu}$
3-Parameter-Modell	$D_1 - \frac{D_2}{1 + \omega^2 \tau^2}$	$D_2 \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2}$	$\frac{D_2 \omega \tau}{D_1 - D_2 + D_1 \omega^2 \tau^2}$

Tabelle 2.2: Frequenzabhängigkeit von Moduln und Verlustfaktoren für unterschiedliche Dämpfungsmechanismen [27]

Gedämpfte Biegeschwingungen von Kirchhoffplatten können somit untersucht werden, wenn in der beschreibenden Differentialgleichung (2.25) die Biegesteife durch eine komplexe Größe ersetzt wird. Wenn das Material der Platte einen Verlustfaktor von  $\eta_B$  hat und damit der Elastizitätsmodul zu  $\underline{E} = E(1 + i\eta_B)$  gegeben ist, erhält man für die Biegesteifigkeit

$$\underline{B} = \frac{\underline{E}}{1 + \nu^2} \frac{h^3}{12} = \frac{E(1 + i\eta)}{1 + \nu^2} \frac{h^3}{12} = B \cdot (1 + i\eta_B) \quad . \quad (2.56)$$

Der Verlustfaktor  $\eta_B$  der Biegesteifigkeit ist für homogene Platten identisch mit dem Verlustfaktor des Elastizitätsmoduls des Materials und abhängig vom gewählten Dämpfungsmodell.

Nach Einsetzen von (2.56) in die Kirchhoffgleichung 2.25 werden damit die gedämpften Biegeschwingungen der Platte im Frequenzbereich beschrieben.

## 2.2.5 Visko-elastische Dämpfung von Laminat-Platten

Die visko-elastische Dämpfung bei Fensterscheiben ist vor allem bei den sogenannten Verbundglasscheiben von großer Bedeutung (vgl. Abschnitt 5.3.4), d.h. bei einer Laminatplatte mit einer visko-elastischen Zwischenschicht. Dabei hängt die Gesamtdämpfung der Verbundplatte von der Steifigkeit und dem Verlustfaktor des dämpfenden Materials sowie von der Dicke der visko-elastischen Zwischenschicht ab. Diese Zusammenhänge stellte schon Oberst fest, der erstmals die Dämpfung durch sogenannte Entdröhnbeläge mechanisch beschrieb [86, 87]. Für einen umfassenden Überblick bezüglich der Dämpfung visko-elastischer Schichten sei auf [102] verwiesen.

Für die Schwingungsanalyse von Mehrschichtplatten sind zwei grundlegend unterschiedliche Vorgehensweisen denkbar: Zum einen kann die Differentialgleichung für die geschichtete Platte z.B. mittels des Hamiltonschen Prinzips hergeleitet [27] bzw. auf die klassische oder verbesserte Laminattheorie [2] zurückgegriffen werden, um daraus die Finite-Element Formulierung abzuleiten. So wurde z.B. die Tragfähigkeit von Verbundglasscheiben in jüngster Zeit durch eine Finite-Element-Methode beschrieben, der eine Modifizierung der Laminattheorie zugrundeliegt, die auf der Plattentheorie von Timoshenko-Mindlin basiert [17].

Eine andere Möglichkeit besteht darin, die Finite-Element Formulierung für die Einfachplatte beizubehalten und Berechnungen mit homogenisierten Materialparametern (z.B. analog zu Kerwin [66], Plass [88] oder Ross-Kerwin-Ungar [90]) für die Dreischichtplatte durchzuführen. Da bei den insgesamt noch als dünn anzusehenden Verbundglasscheiben nur die veränderte Schallabstrahlung also die Dämpfung der BiegeWellen von Interesse ist, ist der größere Aufwand durch Verwendung der Laminattheorie nicht notwendig, denn diese veränderte Schallabstrahlung kann durch einen homogenisierten Verlustfaktor ausreichend erfaßt werden.

Die Dämpfung der Biegeschwingungen einer Dreischichtplatte wurde durch Kerwin in [66] eingehend erläutert, wobei seine Herleitungen auf homogenisierte Materialparameter abzielen. Allerdings ist eine der Arbeit von Kerwin zugrundeliegende Annahme für unsere Problemstellung nicht zutreffend: Die Steifigkeit der äußeren Schichten ist bei Verbundgläsern nicht wesentlich kleiner als die Steifigkeit der Mittelschicht, weshalb Kerwins Ansatz nicht übernommen werden kann.

Auch der Ansatz von Plass [88] kann nicht ohne weiteres übertragen werden. Dieser geht zwar von zwei Platten gleichen Materials mit einem visko-elastischen Kern aus, allerdings beschränkt sich die Herleitung auf die Verwendung von sehr dünnen äußeren Schichten.

Hier erweist sich der sogenannte *Ross-Kerwin-Ungar-Ansatz* (RKU-Ansatz) für eine Mehrschichtplatte aus [90] als vorteilhaft, um die Dämpfung der Biegeschwingungen einer der vorliegenden Problemstellung entsprechenden Dreischichtplatte zu erfassen: Dabei wird aus Gleichgewichtsbedingungen am differentiellen Element unter Berücksichtigung von Geometrie und den Materialparametern der einzelnen Schichten die Biegesteifigkeit der Verbundplatte berechnet (vgl. Abb. 2.11).

### Ross-Kerwin-Ungar (RKU)-Ansatz

Der Ross-Kerwin-Ungar-Ansatz setzt voraus, daß alle Schichten eine Biegebewegung vollziehen und die mittlere, verlustbehaftete Schicht aufgrund des flächigen Verbundes der einzelnen Schichten untereinander eine Scherung erfährt (vgl. Abb. 2.9).

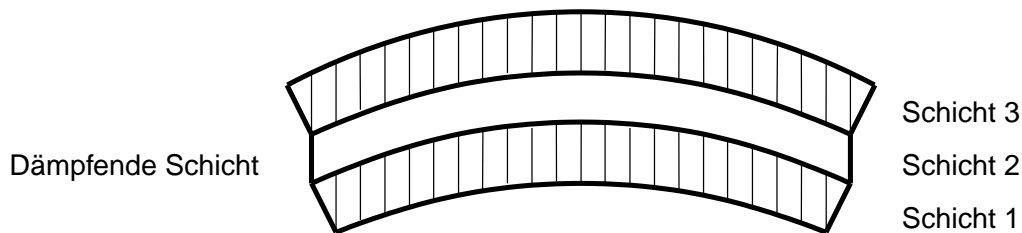


Abbildung 2.9: Scherverformung der dämpfenden Schicht einer Laminatplatte

Die Materialgrößen, wie sie sich durch den RKU-Ansatz ergeben, sind im weiteren unter Verwendung der folgenden Symbole und Abkürzungen angegeben, wobei die Numerierung für die einzelnen Schichten jeweils durch Indizes erfolgt:

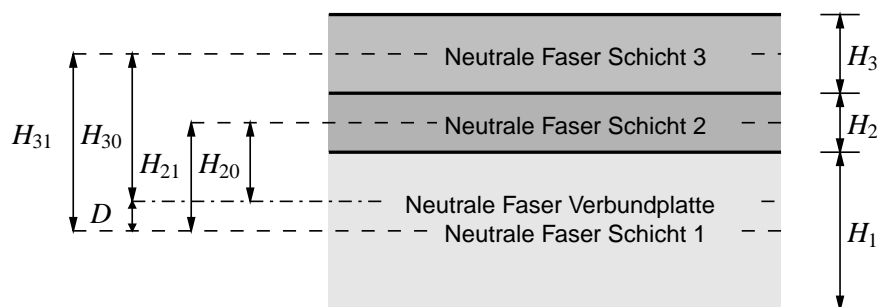


Abbildung 2.10: Geometrie einer Laminat-Platte mit 3 Schichten

$E$	Elastizitätsmodul $[N/m^2]$
$D$	Abstand $[m]$ (vgl. Abb. 2.10)
$G$	Schubmodul $[N/m^2]$
$H$	Abstand $[m]$ (vgl. Abb. 2.10)
$K = E \cdot H$	Steifigkeit $[N/m]$
$\kappa = \omega/c$	Wellenzahl $[1/m]$
$\phi$	Biegewinkel $[rad]$
$\psi$	Scherwinkel von Schicht 2 $[rad]$

Die neutralen Fasern der dünnen Einzelschichten fallen jeweils mit den Mittelebenen zusammen, die neutrale Faser der Laminatplatte ist um den Betrag  $D$  (vgl. Gl. (2.65)) gegenüber der

Mittelebene der ersten Schicht verschoben. Das Biegemoment der gesamten Dreischichtplatte berechnet sich aus Gleichgewicht am differentiellen, verformten Element der Dreischichtplatte (s. Abb. 2.11). Die Größe  $\phi$  gibt dabei den Biegewinkel der gesamten Platte und  $\psi$  den Scherwinkel der verformten Mittelschicht an.

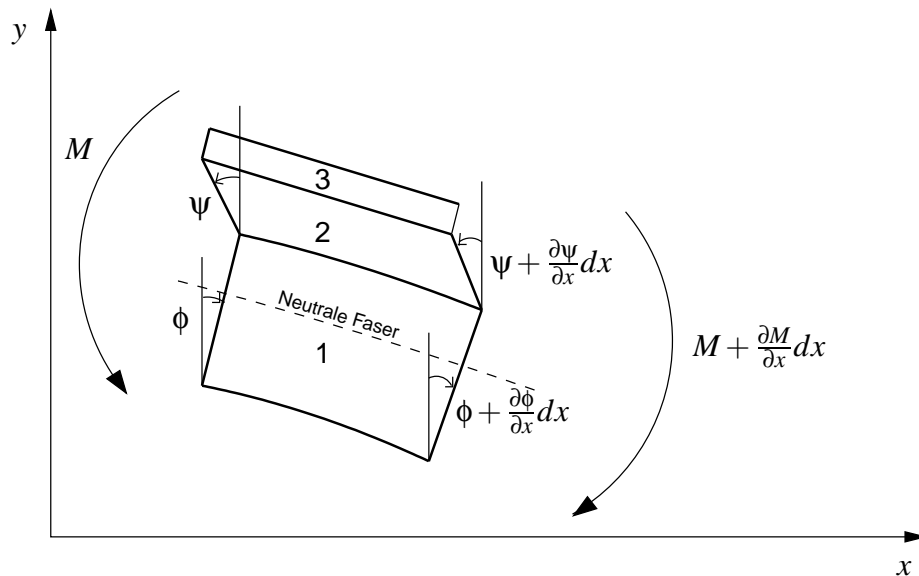


Abbildung 2.11: Differentielles Element einer Dreischichtplatte bei Biegeverformung

Daraus ergibt sich das Biegemoment der Dreifachplatte aus der Summe der Schnittmomente der Einzelschichten und der durch die Schnittkräfte in den Einzelschichten erzeugten Momente bzgl. der neutralen Faser:

$$M = B \frac{\partial \phi}{\partial x} = \sum M_{ii} + \sum F_i H_{i0} \quad (2.57)$$

In dieser Gleichung werden mit  $M_{ii}$  die Momente bezeichnet, die durch die Kräfte in der i-ten Schicht um die eigene neutrale Faser erzeugt werden und mit  $F_i$  die resultierenden Kräfte der i-ten Schicht. Dabei sind die Momente der Einzelschichten gegeben zu

$$M_{11} = K_1 \frac{H_1^2}{12} \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (2.58)$$

$$M_{22} = K_2 \frac{H_2^2}{12} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \quad (2.59)$$

$$M_{33} = K_3 \frac{H_3^2}{12} \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (2.60)$$

und die Kräfte der Einzelschichten resultieren aus der Integration der Spannungen über die

jeweilige Schichtdicke:

$$F_1 = K_1 H_{10} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \quad (2.61)$$

$$F_2 = K_2 \left( H_{20} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{H_2}{2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \quad (2.62)$$

$$F_3 = K_3 \left( H_{30} \frac{\partial \phi}{\partial x} - H_2 \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \quad (2.63)$$

Bei reiner Biegung muß die Summe der resultierenden Kräfte der Einzelschichten verschwinden. Mit  $H_{10} = -D$ ,  $H_{20} = H_{21} - D$  und  $H_{30} = H_{31} - D$  (vgl. Abbildung 2.10) erhält man

$$\begin{aligned} \sum F_i &= 0 \\ &= -(K_1 + K_2 + K_3) D \frac{\partial \phi}{\partial x} + (K_2 H_{21} + K_3 H_{31}) \frac{\partial \phi}{\partial x} - \left( \frac{K_2}{2} + K_3 \right) H_2 \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.64) \end{aligned}$$

Auflösen dieser Gleichung liefert die Verschiebung  $D$  der neutralen Faser für eine Dreifachplatte im Vergleich zur Einfachplatte:

$$D = \frac{K_2 H_{21} + K_3 H_{31} - \left( \frac{K_2}{2} + K_3 \right) H_2 \frac{\partial \psi}{\partial \phi}}{K_1 + K_2 + K_3} \quad (2.65)$$

Daneben liefert Einsetzen und Auflösen der Gleichung (2.57) einen Ausdruck für die Biegesteifigkeit der Dreifachplatte:

$$\begin{aligned} B &= K_1 \frac{H_1^2}{12} + K_2 \frac{H_2^2}{12} + K_3 \frac{H_3^2}{12} - K_2 \frac{H_2^2}{12} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} + K_1 D^2 + K_2 (H_{21} - D)^2 \\ &\quad + K_3 (H_{31} - D)^2 - \left( \frac{K_2}{2} (H_{21} - D) + K_3 (H_{31} - D) \right) H_2 \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \quad (2.66) \end{aligned}$$

Damit der vorhergehende Ausdruck in Verbindung mit Gleichung (2.65) als Materialkonstante der Dreifachplatte in Berechnungen einfließen kann, ist die Kenntnis einer Beziehung von Scherwinkel  $\psi$  und Biegewinkel  $\phi$  notwendig. Dazu muß die die Spannung-Dehnungs-Beziehung für die Mittelschicht herangezogen werden:

$$\psi = -\frac{1}{G_2} \frac{\partial F_3}{\partial x} \quad (2.67)$$

Für den Fall, daß alle Schichten die gleichen, sinusförmigen Schwingungen vollziehen, sind die Ableitungen der Scherungen proportional zu den zugehörigen Ableitungen des Biegewinkels  $\phi$ . Die Scherungen sind dann mit ihren zweiten Ableitungen verknüpft durch

$$\psi = \frac{1}{\kappa^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (2.68)$$



wobei mit  $\kappa = \frac{\omega}{c_B}$  die Wellenzahl bezeichnet wird.

In Gleichung (2.67) kann die örtliche Ableitung von (2.63) eingesetzt und so unter Verwendung von (2.68) ein Ausdruck für das Verhältnis von Scher- zu Biegewinkel abgeleitet werden:

$$H_2 \frac{\partial \psi}{\partial \phi} = H_2 \frac{(\partial^2 \psi / \partial x^2)}{(\partial^2 \phi / \partial x^2)} = \frac{H_{31} - D}{1 + \frac{G_2}{K_3 H_2 \kappa^2}} \quad (2.69)$$

Der dimensionslose Quotient  $\frac{G_2}{K_3 H_2 \kappa^2}$  im Nenner wird abgekürzt als Scherparameter  $g$ :

$$g = \frac{G_2}{K_3 \cdot H_2 \cdot \kappa^2} \quad (2.70)$$

In die Berechnung des Scherparameters fließt der Schubmodul der Mittelschicht ein. Damit ist die Querkontraktionszahl  $\nu_2$  abhängig von der Größe des Scherparameters:

$$\nu_2 = \frac{E_2}{2 \cdot g \cdot K_3 \cdot H_2 \cdot \kappa^2} - 1 \quad (2.71)$$

Da die beiden Deckschichten annähernd als schubstarr angenommen werden können, entspricht (2.71) der Querkontraktionszahl der gesamten Platte.

Wenn man nun die beiden Gleichungen (2.65) und (2.69) nach der unbekannten Verschiebung der neutralen Faser  $D$  und der Ableitung der Scherung  $\psi$  auflöst, kann die Biegesteifigkeit der Dreischichtplatte nach Gleichung (2.66) in bekannten Material- und Geometrie Größen der einzelnen Schichten angegeben werden:

$$D = \frac{K_2 \cdot (H_{21} - \frac{H_{31}}{2}) + (K_2 \cdot H_{21} + K_3 \cdot H_{31}) \cdot g}{K_1 + \frac{K_2}{2} + g \cdot (K_1 + K_2 + K_3)} \quad (2.72)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \phi} = \frac{1}{H_2} \cdot \frac{K_1 \cdot H_{31} + K_2 \cdot (H_{31} - H_{21})}{(K_1 + \frac{K_2}{2} + g \cdot (K_1 + K_2 + K_3))} \quad (2.73)$$

Zur Berechnung der Biegeschwingungen liegen somit die notwendigen, homogenisierten Materialparameter vor: Mit den Gleichungen (2.72) und (2.73) liegt die Biegesteifigkeit der gesamten Platte nach Gleichung (2.56) vor, und durch den Ausdruck (2.71) ist die Querkontraktionszahl der Laminatplatte gegeben. Setzt man nun die komplexen Moduln zur Berücksichtigung der Dämpfungseigenschaften der verlustbehafteten Schichten ein, so erhält man die gesuchte komplexe Biegesteifigkeit der Laminatplatte.

Der RKU-Ansatz wird in der weiteren Arbeit verwendet, um die Schalltransmission durch Verbundglasscheiben zu berechnen. Dazu wird bei der Finite-Element-Analyse nach Abschnitt 3.1.1 die homogenisierte, komplexe Biegesteifigkeit angesetzt. In Kapitel 6.8 wird anhand von Beispielrechnungen verdeutlicht, daß der RKU-Ansatz die Verluste infolge einer dämpfenden Zwischenschicht erfassen kann. Allerdings ist zu erwähnen, daß mit der Umsetzung dieses Ansatzes nur eine Näherungslösung der Schalltransmissionsproblematik durch Verbundverglasungen vorliegt. Denn wegen der scherenden Mittelschicht ist die Annahme der Kirchhofftheorie

von einer unendlichen Schubsteife der Platte verletzt. Daneben ist der RKU-Ansatz aufgrund der der Herleitung zugrundeliegenden Sinus-Ansätze theoretisch auf gelenkig gelagerte Platten beschränkt ist. Die Verwendung dieses Ansatzes liefert dennoch gute Ergebnisse, da die Schallabstrahlung einer Platte ein Resultat der Auslenkungen ist. Dabei wird die gesamte Abstrahlung der Platte nicht wesentlich durch die Verformungen der Platte am Rand, sondern durch die Verformungsfigur der gesamten Platte bestimmt. Diese ist - sieht man von den spezifischen Eigenformen an den ausgewiesenen Frequenzen ab - für den eingespannten und gelenkigen Fall im Prinzip sehr ähnlich. Aus diesem Grunde ist der Ansatz auch auf andere Lagerungen übertragbar, wie dies auch Ungar in [102] feststellt.

## 2.3 Wellenausbreitung im kompressiblen Fluid

Zur Herleitung der differentiellen Beschreibung der Wellenausbreitung in idealen, kompressiblen Fluiden kann wiederum das Hamiltonsche Prinzip (Gl. (2.10)) herangezogen werden [28], wobei hier zunächst nur die homogene Form, d.h. ohne die Berücksichtigung von Schallquellen, verwendet werden soll.

Der Kompressionsmodul  $K$  ist definiert als das Verhältnis der erforderlichen Druckänderung  $\Delta p$  zur erzielten relativen Volumenänderung, also gilt:

$$K = -\Delta p \cdot \frac{V}{\Delta V} \quad (2.74)$$

Die potentielle Energie  $E_{pot}$  des kompressiblen Systems ergibt sich dann in Abhängigkeit von der Volumenänderung  $\Delta V$  zum interessierenden Volumen  $V$ :

$$E_{pot} = \frac{1}{2} \Delta p \int_V \left( \frac{\Delta V}{V} \right) dV = \frac{1}{2} K \int_V \left( \frac{\Delta V}{V} \right)^2 dV = \frac{1}{2} K \int_V \left( \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} \right)^2 dV \quad (2.75)$$

In einem homogenen Fluid der Dichte  $\rho$  ergibt sich die kinetische Energie  $E_{kin}$  zu:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \rho \int_V (\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2 + \dot{\xi}_3^2) dV \quad (2.76)$$

Dabei werden jeweils mit  $\xi_1, \xi_2$  und  $\xi_3$  die Komponenten der Verschiebung bezeichnet und mit  $\dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2$  und  $\dot{\xi}_3$  ihre Geschwindigkeiten.

Durch Einsetzen dieser Energieanteile in Gleichung (2.10) erhält man

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \int_V \left[ \frac{\rho}{2} (\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2 + \dot{\xi}_3^2) - \frac{K}{2} \left( \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} \right)^2 \right] dV dt = 0 \quad (2.77)$$

bzw.

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_V \left[ \rho \left( \xi_1 \delta \dot{\xi}_1 + \xi_2 \delta \dot{\xi}_2 + \xi_3 \delta \dot{\xi}_3 \right) - \frac{K}{2} \left( \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} \right) \left( \delta \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \delta \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} + \delta \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} \right) \right] dV dt = 0 \quad (2.78)$$

Um die Integrationen in dieser Gleichung durchführen zu können, müssen zwei unterschiedliche Typen von Integralen behandelt werden. Zum einen werden die Terme, in denen Zeitableitungen vorkommen, partiell integriert:

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_V \dot{\xi}_1 \delta \dot{\xi}_1 dV dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_V \xi_1 \delta \left( \frac{\partial \xi_1}{\partial t} \right) dV dt = \int_V \xi_1 \delta \xi_1 dV \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \int_V \dot{\xi}_1 \delta \xi_1 dV dt \quad (2.79)$$

Analog ist eine Umformung der Terme mit Ortsableitungen möglich.

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \int_V \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \delta \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} dV dt &= \int_{t_0}^{t_1} \int_V \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \delta \left( \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \right) dx_2 dx_1 dx_3 dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \delta \xi_2 dx_1 dx_3 dt \Big|_{x_{2a}}^{x_{2b}} - \int_{t_0}^{t_1} \int_V \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1 \partial x_2} \delta \xi_2 dV dt \end{aligned} \quad (2.80)$$

Wenn die Wellengleichung für ein unendlich ausgedehntes Medium hergeleitet werden soll, kann man davon ausgehen, daß die Grenzen  $x_{2a}$  und  $x_{2b}$  so weit entfernt sind, daß die zugehörigen Feldgrößen verschwinden. Außerdem kann man voraussetzen, daß das Feld zum Zeitpunkt  $t_0$  in Ruhe ist und vor dem Zeitpunkt  $t_1$  wieder zur Ruhe kommt. Damit können in den Gleichungen (2.79) und (2.80) die Terme über diese Integrationsgrenzen vernachlässigt werden. Damit ergibt sich aus (2.78), wenn die Definition der Divergenz mit  $\left( \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} \right) = \text{div } \vec{\xi}$  und die Summationskonvention herangezogen wird

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_V \left[ -\rho \ddot{\xi}_i \delta \xi_i + K \frac{\partial \text{div } \vec{\xi}}{\partial x_i} \delta \xi_i \right] dV dt = 0 \quad . \quad (2.81)$$

Da diese Gleichung für alle Werte von  $\delta \xi_i$  Gültigkeit haben muß, ergeben sich folgende Gleichungen:

$$K \frac{\partial \text{div } \vec{\xi}}{\partial x_i} - \rho \ddot{\xi}_i = 0 \quad (2.82)$$

Die Wellengleichung erhält man hieraus, wenn zunächst jede dieser Gleichung nach  $x_i$  differenziert wird:

$$K \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \text{div } \vec{\xi} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial}{\partial x_1} \xi_1 = 0 \quad (2.83)$$

$$K \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \text{div } \vec{\xi} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial}{\partial x_2} \xi_2 = 0 \quad (2.84)$$

$$K \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \text{div } \vec{\xi} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial}{\partial x_3} \xi_3 = 0 \quad (2.85)$$

Addieren dieser Gleichungen und anschließendes Ersetzen des Produktes aus Kompressionsmodul  $K$  und  $\text{div } \vec{\xi}$  durch den Schalldruck (vgl. Gl. (2.74)) führt auf die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x_3^2} - \frac{\rho}{K} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta p(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad . \quad (2.86)$$

Der Zeitverlauf der Antwort eines System kann nicht nur über diese Wellengleichung, sondern auch über Lösungen im Frequenzraum ermittelt werden. Mit Hilfe von Integraltransformationen wie der Laplace- oder der Fouriertransformation kann für beliebige transiente Schwingungen das im Zeitbereich formulierte Problem in den Bildbereich überführt werden. Nach Ermittlung der Lösung kann der Zeitverlauf in der Regel durch Rücktransformation ermittelt werden.

Mit Hilfe des harmonischen Zeitansatzes

$$p(\mathbf{x}, t) = \hat{p}(\mathbf{x}) e^{i\omega t} \quad (2.87)$$

wird die Wellengleichung (2.86) in die zeitunabhängige sogenannte *Helmholtz-Gleichung* für die Beschreibung der Wellenamplitudenverteilung in einem Fluid überführt:

$$\hat{p}(\mathbf{x})_{,ii} + \kappa^2 \hat{p}(\mathbf{x}) = 0 \quad . \quad (2.88)$$

Der Quotient  $\kappa = \frac{\omega}{c}$  aus Kreisfrequenz  $\omega$  und Schallgeschwindigkeit  $c$  wird als Wellenzahl bezeichnet.

Für weitergehende Studien der differentiellen Beziehungen für akustische Medien sei zum Beispiel auf [82] verwiesen.

### 2.3.1 Akustische Randwertprobleme

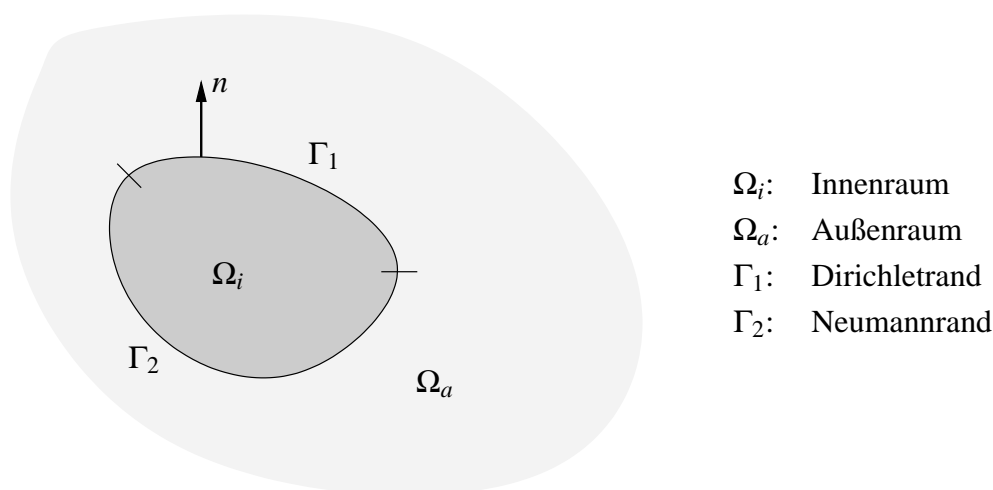


Abbildung 2.12: Außenraum, Innenraum und Berandung eines Gebietes

Mit der Helmholtz-Gleichung (2.88) liegt die differentielle Problembeschreibung für akustische Fluide vor. Zur Lösung dieser Differentialgleichung ist die Kenntnis von Randbedingungen nötig, durch die die in der Natur auftretenden Verhältnisse näherungsweise modelliert werden können. Bei den Randbedingungen unterscheidet man drei Arten, die Dirichletsche, die Neumannsche und die Robinsche Randbedingung.

Bei der *Dirichletschen Randbedingung* wird der Verlauf des Schalldrucks am Rand  $\Gamma_1$  vorgegeben:

$$p(\mathbf{x}) = \bar{p}(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1 \quad (2.89)$$

Von einer *Neumannschen Randbedingung* spricht man, wenn der normal zur Oberfläche fließende Schallfluß vorgegeben wird, also die Normalenableitung längs des Randes  $\Gamma_2$ :

$$\frac{\partial p}{\partial n}(\mathbf{x}) = \bar{q}(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2 \quad (2.90)$$

Unter einer *Robinschen Randbedingung* versteht man eine Linearkombination aus Dirichlet-scher und Neumannscher Randbedingung, die für teilweise absorbierende Ränder verwendet wird.

### 2.3.2 Eindeutigkeit von Randwertproblemen

Die Lösung der Helmholtzgleichung führt jedoch auch bei Kenntnis der Randwerte nicht automatisch auf eine eindeutige Druck- bzw. Schnelleverteilung im Raum. In der Regel sollten physikalisch sinnvolle Problemstellungen auch auf eine eindeutige Lösung führen. Bei der Betrachtung eines Modellproblems werden allerdings häufig Vereinfachungen getroffen, so daß die Eindeutigkeit näher untersucht werden sollte. In ausführlicherer Form diskutiert z.B. Tröndle in [101] die Eindeutigkeit von akustischen Randwertproblemen.

Bezüglich der Eindeutigkeit ergeben sich Unterschiede bei der Berechnung von Größen im Innern oder im Äußeren des Gebietes, also bei der Betrachtung von Innenraum- oder Außenraumprobleme. Innenräume sind in der Regel in der Raumakustik zu untersuchen. Die Berechnung von Abstrahlproblemen oder Schallfeldern im Freien erfordert die Behandlung von Außenraumproblemen. In der folgenden Arbeit wird zwar ausschließlich akustische Wellenausbreitung in Fluiden ohne die Berücksichtigung der Dämpfung betrachtet, um zu einer Eindeutigkeitsaussage zu gelangen, muß jedoch neben der Unterscheidung in Innenraum- und Außenraumproblemen eine Unterscheidung nach der Wellenzahl  $\kappa$  erfolgen:

Statischer Fall	$\kappa = 0$
Schwingung ohne Dämpfung	$\kappa$ ist reell
Schwingung mit Dämpfung	$\kappa$ ist komplex

#### Innenraumprobleme

Für gedämpfte Schwingungen existiert nur eine Lösung, die im Gebiet die Helmholtzgleichung und auf dem Rand die Randbedingung erfüllt. Für gedämpfte Innenraumprobleme läßt sich demnach eine Eindeutigkeitsaussage treffen.

Bei Problemen mit einer reellen Wellenzahl existiert im allgemeinen sowohl für Dirichlet- als auch für Neumannprobleme keine eindeutige Lösung, sondern es treten für bestimmte charakteristische Wellenzahlen  $\kappa$  Eigenlösungen auf.

Im statischen Fall weist nur das Dirichletproblem eine eindeutige Lösung auf, beim Neumannproblem läßt sich die Lösung nur bis auf einen beliebigen konstanten Wert eindeutig bestimmen. Jede Konstante ist eine Lösung des homogenen Neumannschen Problems. Beides läßt sich aus der Anwendung des Maximumprinzips der Potentialtheorie zeigen. Die Beweise dieser Eindeutigkeitsaussagen finden sich bei Burg/Haf/Wille [18].

### Außenraumprobleme

Die Helmholtzgleichung weist im Außenraum eine eindeutige Lösung auf, wenn die *Sommerfeldsche Abstrahlbedingung* für alle Richtungen erfüllt ist [98].

$$\frac{\partial p}{\partial r} = i\kappa p + o\left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{für } r \rightarrow \infty \quad (2.91)$$

Diese Eindeutigkeit gilt für alle drei zu untersuchenden Fälle. Beweisen läßt sich dies nach [74] unter Betrachtung der Sommerfeldschen Abstrahlbedingung in der komplexen Form.

$$\left(\frac{\partial p}{\partial r} - i\kappa p\right) \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial r} - i\bar{\kappa} \bar{p}\right) = o\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad \text{für } r \rightarrow \infty \quad (2.92)$$

Unter der Annahme, daß  $p$  die Differenz zweier Lösungen der Helmholtzgleichung mit identischen Randwerten ist, folgt unter Anwendung der 1. und 2. Greenschen Identität nach einigen Umformungen (s. [101]) die Gleichung (2.93). Diese Sätze können angewendet werden, wenn ein kugelförmiges Gebiet  $\Omega_R$  betrachtet wird, das das zu untersuchende Gebiet  $\Omega$  umschließt, wodurch ein Innenraum  $D_R$  entsteht.

$$\oint_{\partial\Omega_R} \left( \left| \frac{\partial p}{\partial r} \right|^2 + |\kappa|^2 |p|^2 \right) d\Gamma + 2\Im(\kappa) \oint_{D_R} \left( |p_{,ii}|^2 + (\Im^2(\kappa)) |p|^2 \right) d\Omega = o(1) \quad \text{für } R \rightarrow \infty \quad (2.93)$$

Es ist zu zeigen, daß  $p$  eindeutig verschwindet, da daraus die Eindeutigkeit folgt. Für  $\Im(\kappa) > 0$  muß  $p$  überall gleich Null sein, damit das Integral über den Innenraum für  $R \rightarrow \infty$  verschwindet.

Für reelle  $\kappa$  verbleibt nur das Integral über  $\Omega_R$ . Daraus folgt nach dem Lemma von Rellich ebenfalls, daß  $p$  überall Null ist [74].

Die Eindeutigkeit im statischen Fall wird durch die Zusatzforderung gesichert, daß  $p$  in einer Umgebung von  $\infty$  harmonisch ist.

### 2.3.3 Praxisrelevante Randbedingungen an Begrenzungsflächen

An Begrenzungsflächen des akustischen Mediums werden die Wellen zumindestens zum Teil reflektiert. In welchem Maße dies geschieht, ist von der Beschaffenheit der Grenzfläche abhängig und kann bei senkrechtem Schalleinfall durch den Reflexionsfaktor  $r$ , der das Verhältnis der komplexen Drücke (Schnellen) von reflektierter  $\hat{p}_r(\hat{v}_r)$  und einfallender Welle  $\hat{p}_e(\hat{v}_e)$  kennzeichnet, charakterisiert werden [57]:

$$r = \frac{\hat{p}_r}{\hat{p}_e} = -\frac{\hat{v}_r}{\hat{v}_e} \quad (2.94)$$

Einen allgemeinen Zusammenhang zwischen dem Schalldruck und der Schnelle liefert die folgende Gleichung:

$$\hat{p} = z^o \cdot \hat{v} \quad (2.95)$$

Der Faktor  $z^o$  wird nach [97] als Schallhärte oder in Analogie zur Elektrotechnik als Wellenwiderstand bzw. Punktimpedanz eines akustischen Mediums bezeichnet. Er ergibt sich für eine fortschreitende Welle als Produkt der Dichte  $\rho$  und der Schallgeschwindigkeit  $c$  des Fluids, ist frequenzunabhängig und reell.

$$z^o = \frac{\hat{p}}{\hat{v}} = \rho \cdot c \quad (2.96)$$

Bei Anwendung der Definition (2.95) zur Bestimmung der komplexen Wandimpedanz einer Begrenzungsfläche muß das Verhältnis der komplexen Amplituden  $\hat{p}_{ges}$  des Gesamtdruckes und  $\hat{v}_{ges}$  der gesamten Schnelle an der Begrenzung gebildet werden. Mit der Definition des Reflexionsfaktors (Gl. (2.94)) ergeben sich diese Größen zu

$$\hat{p}_{ges} = (1 + r) \cdot \hat{p}_e \quad \text{bzw.} \quad \hat{v}_{ges} = (1 + r) \cdot \hat{v}_e \quad (2.97)$$

und damit die komplexe Wandimpedanz:

$$z = \frac{\hat{p}_{ges}}{\hat{v}_{ges}} = \frac{1 + r}{1 - r} \cdot \frac{\hat{p}_e}{\hat{v}_e} \quad (2.98)$$

Bei der Betrachtung von ebenen Wellen kann für  $\frac{\hat{p}_e}{\hat{v}_e}$  die Punktimpedanz  $z^o$  nach Gleichung (2.96) eingesetzt werden.

Es ergibt sich damit als komplexe Wandimpedanz für die Kennzeichnung einer ebenen Welle bei senkrechtem Schalleinfall:

$$z = \frac{1 + r}{1 - r} \cdot z^o \quad (2.99)$$

Mit der Wandimpedanz  $z$  und Gleichung (2.98) lassen sich die unterschiedlichen, in der Praxis auftretenden Beschaffenheiten von Begrenzungsflächen wie schallharte, -weiche oder absorbierende Bedingungen beschreiben:

- An einer **schallharten** Begrenzung wird die Schnelle zu Null, d.h.  $\hat{v}_{ges} = 0$ . Daraus ergibt sich  $z \rightarrow \infty$  und damit ein Reflexionsfaktor  $r$  von  $+1$ . Das bedeutet, daß die ebene Schallwelle an der völlig unnachgiebigen Begrenzungsfläche so reflektiert wird, daß sich die Druckkomponenten der einfallenden und reflektierten Welle addieren. Für die Schnelle entsteht eine stehende Welle mit einem Phasensprung von  $\frac{\lambda}{2}$ .

Eine schallharte Begrenzung stellt also einen Sonderfall der Neumannschen Randbedingung dar, da der Schallfluß bzw. die Schnelle bekannt ist und gerade verschwinden muß (vgl. Abb. 2.13(a)).

- An einer **schallweichen** Begrenzung verschwindet der Schalldruck, d.h.  $\hat{p}_{ges} = 0$ . Damit ist die komplexe Wandimpedanz  $z = 0$  und für den Reflexionsfaktor  $r$  ergibt sich  $-1$ . An einer vollkommen nachgiebigen Begrenzung wird der Druck also gegenphasig reflektiert und die Schnelle verdoppelt sich.

Eine schallweiche Begrenzungsfläche ist demnach eine spezielle Dirichletsche Randbedingung, der Druck ist bekannt und wird gerade zu Null (vgl. Abb. 2.13(b)).

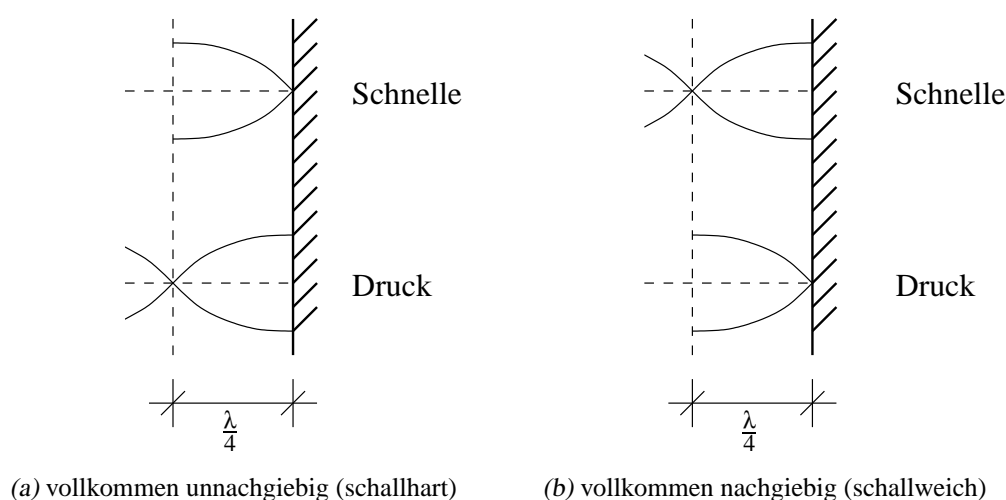


Abbildung 2.13: Reflexion einer Schallwelle an einer Begrenzungsfläche

Sowohl im Fall der vollkommen nachgiebigen als auch im Fall der vollkommen unnachgiebigen Wand sind die Amplituden der einfallenden und der reflektierten Welle gleich groß. Dem liegt die in der Realität selten erfüllte Annahme zugrunde, daß beim Auftreffen der Wellen an eine Begrenzungsfläche keine Energie dissipiert wird. Ein Maß für die Größe etwaiger Verluste ist der Absorptionsgrad  $\alpha$ . Er gibt im zeitlichen Mittel das Verhältnis der von der Begrenzungsfläche absorbierten zur einfallenden Energie an [97] und läßt sich bei Kenntnis des Reflexionsfaktors direkt aus der folgenden Gleichung ermitteln:

$$\alpha = 1 - |r|^2 \quad (2.100)$$

Für den Fall der schallweichen und -harten Begrenzungsfläche ist nach Gleichung (2.100) der Absorptionsgrad gleich Null, es gibt an der Begrenzungsfläche keine Verluste.

- An einer vollkommen **absorbierenden** Begrenzung ist der Absorptionsfaktor  $\alpha$  gleich 1. Da dann der Reflexionsfaktor  $r$  gleich 0 wird, bedeutet dies, daß kein Anteil der einfallenden Welle reflektiert wird. An einer teilweise reflektierenden Begrenzungsfläche ist der Absorptionsfaktor größer als 0 aber kleiner als 1, weil der zugehörige Reflexionsfaktor zwischen 1 und 0 liegen muß.

Die absorbierende Randbedingung einer Begrenzungsfläche entspricht der in Kapitel 2.3.1 erwähnten Robinschen Randbedingung.



### 2.3.4 Eigenschwingungen des rechteckigen Raumes

Die akustischen Eigenschaften eines abgeschlossenen, fluidgefüllten Raumes sind entscheidend von der Lage und Dichte der Eigenfrequenzen abhängig [58]. Die Lage der Eigenfrequenzen kann durch Lösen der Schallfeldgleichung bestimmt werden und soll im folgenden angegeben werden, da die Lokalisierung der Eigenschwingungen Grundlage der Ergebnisinterpretationen in den späteren Kapiteln sein wird.

Ein quaderförmiger, fluidgefüllter Rechteckraum mit den Kantenlängen  $l_1$ ,  $l_2$  und  $l_3$  weist, wenn die Dämpfung des Fluids sowie Verluste an den Wänden vernachlässigt werden können, die Eigenkreisfrequenzen

$$\omega_{ijk} = c\pi \sqrt{\left(\frac{n_i}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{n_j}{l_2}\right)^2 + \left(\frac{n_k}{l_3}\right)^2} \quad (2.101)$$

für  $n_i, n_j, n_k = 0, 1, 2, \dots$  auf.

Wenn nur die kleinste der Eigenfrequenzen  $\omega_{kl}$  von Interesse ist, vereinfacht sich Gleichung (2.101) zu

$$\omega_{kl} = \frac{c\pi}{L} \quad , \quad (2.102)$$

wobei mit  $L$  die größte der drei Kantenlängen des Quaders bezeichnet werden soll.

## 3 Simulation von Schalltransmission

Mit der im vorherigen Kapitel beschriebenen Modellbildung liegt die differentielle Darstellung der Schalltransmissionsproblematik durch ein trennendes Bauteil vor. Diese Problematik besteht aus der Anregung von Biegewellen in der Struktur und der Abstrahlung von Schall durch die schwingende Platte in die Umgebung.

Wie einleitend beschrieben (vgl. Abschnitt 1.2), wird die Simulation des Schalldurchgangs durch Fenster mit Hilfe von Diskretisierungsverfahren angestrebt, wobei die Finite-Element-Methode aus den beschriebenen Gründen für die Struktur, also die Glasscheiben, und für die abgeschlossenen Fluidgebiete, d.h. das luftgefüllte Zimmer und den gasgefüllten Scheibenzwischenraum, verwendet wird und für das halbumendliche Fluidgebiet, die umgebende Luft, eine Randelementmethode herangezogen wird.

Im Weiteren wird daher die Herleitung sowohl der Finite-Element-Methode als auch der Randelementmethode für die Wellenausbreitung in kompressiblen Fluiden sowie die Herleitung der Finite-Element-Methode für die Behandlung von Biegeschwingungen einer Kirchhoffplatte vorgenommen.

### 3.1 Finite-Element-Methode (FEM)

Die Differentialgleichungen für die exakte Beschreibung von Schwingungen mechanischer Systeme können aus dem Hamiltonschen Prinzip (2.10) hergeleitet werden.

Die Finite-Element-Methode liefert eine Näherungslösung für die Freiwerte eines mechanischen Systems. Das Funktional  $\chi$ , das eine stationäre, harmonische Schwingung in einem abgeschlossenen Gebiet beschreibt, ist durch

$$\chi = E_{kin} - E_{pot} + W \quad (3.1)$$

gegeben. Das minimierte Funktional ( $\delta\chi = 0$ ) erfüllt die Wellengleichung und die Randbedingungen.

#### 3.1.1 FEM für die Biegebewegung der Kirchhoffplatte

Legt man die vereinfachenden Annahmen der Kirchhofftheorie zugrunde, ergeben sich die Energie- und Arbeitsanteile einer zu Biegeschwingungen angeregten Platte verändert im Vergleich zur allgemeinen Plattentheorie (Gleichungen (2.12)–(2.14)). Aufgrund der vernachläss-

sigbaren Schubverzerrungen erhält man für den eingeschwungenen Zustand

$$E_{kin} = \frac{\rho\omega^2}{2} \iiint (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) dx dy dz \quad (3.2)$$

$$E_{pot} = \frac{1}{2} \iiint (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xz} \gamma_{xz}) dx dy dz \quad (3.3)$$

$$W = \iint (p_B \eta) dx dz, \quad (3.4)$$

wobei mit  $p_B$  die äußere Druckbelastung bezeichnet wird. Da für Kirchhoffplatten die Winkel  $\varphi_x$  und  $\varphi_z$  durch einfache Differentiation mit der Verschiebung  $\eta$  zusammenhängen, wobei

$$\varphi_x = \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad \text{und} \quad \varphi_z = \frac{\partial \eta}{\partial z} \quad (3.5)$$

gilt, kann für die potentielle Energie

$$\begin{aligned} E_{pot} = & \frac{1}{2} \frac{E}{1-\nu^2} \iiint y^2 \cdot \left[ \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right) + \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} + \nu \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} \right) \right] dx dy dz \\ & + \frac{1}{2} G \iiint y^2 \left( 2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial z} \right)^2 dx dy dz \end{aligned} \quad (3.6)$$

und für die kinetische Energie

$$E_{kin} = \frac{\rho\omega^2}{2} \iiint \eta^2 dx dy dz + \frac{\rho\omega^2}{2} \iiint y^2 \cdot \left[ \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz \quad (3.7)$$

geschrieben werden. Die Drehmassenbelegungen haben bei schubstarren Platten einen völlig untergeordneten Einfluß [68], so daß nur der erste Summand von (3.7) Berücksichtigung findet. Nach weiteren Umformungen, Integration über die Plattendicke  $h$  und Einsetzen in Gleichung (3.1) ergibt sich als zu minimierendes Funktional für die FE-Formulierung der Kirchhoffplatte die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} \chi &= E_{kin} - E_{pot} + W \\ &= \frac{\rho h \omega^2}{2} \iint \eta^2 dx dz \\ &\quad - \frac{B}{2} \iint \left[ \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right)^2 + 2\nu \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} \right) + \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} \right)^2 + 2(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial z} \right)^2 \right] dx dz \\ &\quad + \iint (p_B \eta) dx dz \end{aligned} \quad (3.8)$$

Die Minimierungsbedingungen (3.9) ergeben sich, wenn man die Diskretisierung der Plattenfläche durchführt und die Durchbiegungen  $\eta$  in jedem finiten Element  $e$  durch  $\eta = \mathbf{N} \mathbf{u}^e$  approximiert, wobei mit  $\mathbf{N}$  die Ansatzfunktionen, mit  $\mathbf{u}^e$  die Verformungsknotenwerte des Elements und mit  $n$  die Anzahl der Freiwerte bezeichnet werden:

$$\frac{\partial \chi}{\partial u_i} = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad \text{wobei } \chi = \sum \chi^e \quad (3.9)$$

Mit den Elementsteifigkeitsmatrizen

$$\mathbf{K}^e = \int_A \mathbf{N}^T \mathbf{D}^T \mathbf{E} \mathbf{D} \mathbf{N} dA \quad , \quad (3.10)$$

die von der Matrix der Ansatzfunktionen  $\mathbf{N}$ , der Matrix  $\mathbf{D}$ , in der die Ableitungsvorschriften zusammengefaßt sind, und der Elastizitätsmatrix  $\mathbf{E}$  abhängen, und mit den Elementmassenmatrizen  $\mathbf{M}^e$

$$\mathbf{M}^e = \rho h \int_A \mathbf{N}^T \mathbf{N} dA \quad (3.11)$$

sowie dem Lastvektor  $\mathbf{f}^e$  im Element, der für konstante Belastung zu

$$\mathbf{f}^e = \int_A \mathbf{N}^T dA \cdot p \quad (3.12)$$

und für veränderliche Flächenlasten, wenn mit  $\tilde{p}$  die Knotenwerte der Belastung bezeichnet werden, zu

$$\mathbf{f}^e = \int_A \mathbf{N}^T \mathbf{N}_p dA \cdot \tilde{p} \quad (3.13)$$

gegeben ist, erhält man die zu minimierenden Funktionale zu

$$\left\{ \frac{\partial \chi}{\partial u_i} \right\}^e = \mathbf{K}^e \mathbf{u}^e - \omega^2 \mathbf{M}^e \mathbf{u}^e - \mathbf{f}^e \quad . \quad (3.14)$$

Der gesamte Satz von Gleichungen für die Freiheitsgrade aller Knoten der Platte ergibt sich, wenn man die Elementmatrizen und -vektoren aller Elemente zu den Gesamtmatrizen sowie -vektoren aufsummiert.

$$\left\{ \frac{\partial \chi}{\partial u} \right\} = \mathbf{K} \mathbf{u} - \omega^2 \mathbf{M} \mathbf{u} - \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (3.15)$$

$$\text{mit:} \quad K_{ij} = \sum_{e=1}^n K_{ij}^e \quad f_i = \sum_{e=1}^n f_i^e \quad M_{ij} = \sum_{e=1}^n M_{ij}^e$$

Auf die Berücksichtigung und den Einfluß von dissipativen Struktureigenschaften wurde ausführlich im Zusammenhang mit der Verbesserung des Schalldämmverhaltens von plattenförmigen Bauteilen durch Verbundplatten im vorherigen Kapitel eingegangen. Die Dämpfung von Plattenwellen kann erfaßt werden, indem in die Plattendifferentialgleichung der komplexe Modul (vgl. Gl. (2.54)) eingesetzt wird.

Das Gleichungssystem für die Finite-Element-Methode zur Berechnung der Biegeschwingungen von Kirchhoffplatten ergibt sich schließlich zu

$$\mathbf{K} \mathbf{u} - \omega^2 \mathbf{M} \mathbf{u} = (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad . \quad (3.16)$$

### Diskretisierung der Plattendurchbiegung

Die Lösung der Finite-Element-Gleichung für die Kirchhoffplatte (3.16) konvergiert bei feinerer Diskretisierung gegen die analytisch exakte Lösung, wenn der gewählte Verschiebungsansatz einige Konvergenzkriterien erfüllt [108]. Insbesondere ist sicherzustellen, daß

1. bei einer Starrkörperverschiebung keine Verzerrungen der Elemente auftreten,
2. die Verschiebungsfunktionen mindestens konstante Verzerrungen liefern und daß
3. die Verzerrungen an den Zwischenflächen der Elemente endlich sind.

Beim letzteren Kriterium spricht man auch von der Forderung nach *konformen* bzw. *kompatiblen* Ansätzen. Die Ansätze für Flächentragwerke müssen zudem so beschaffen sein, daß sie invariant gegenüber einer Drehung des Koordinatensystems sind. Daher sollten bei Rechteckelementen Produktansätze aus den Ansatzfunktionen des entsprechenden eindimensionalen Problems gebildet werden. Damit wird die Symmetrie des Ansatzes gesichert, die bei Dreieckselementen bei der Verwendung von sogenannten vollständigen Ansatzfunktionen gegeben ist [1].

Bei der Kirchhoffplatte stellen die Krümmungen bzw. Verwindung die Verzerrungsgrößen dar, wobei diese durch Differentiation der Durchbiegungen bestimmt werden können. Die Krümmung in x-Richtung ist  $\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ , in z-Richtung entsprechend  $\kappa_z = -\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$  und die Verwindung kann durch  $\kappa_{xz} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}$  ermittelt werden. Somit liefern die zweiten Ableitungen der Verschiebung die Verzerrungsgrößen, weshalb nach dem Kriterium der mindestens konstanten Verzerrungen mindestens ein quadratischer Verschiebungsansatz gewählt werden muß. Das Kriterium der mindestens konstanten Verzerrungen resultiert aus der Notwendigkeit, die innere virtuelle Arbeit des Verzerrungszustandes an den Spannungen berechnen können zu müssen. Da die Starrkörperbewegung einen Sonderfall der konstanten Verzerrungen (mit dem Wert Null) darstellt, muß das erste Kriterium hier nicht näher beleuchtet werden.

Das Kriterium der konformen Ansätze stellt sicher, daß die Verformungsübergangsbedingungen erfüllt sind. Da bei der Platte die Verzerrungsgrößen aus den zweiten Ableitungen der Durchbiegungen bestimmbar sind, muß die Stetigkeit der ersten Ableitungen an den Elementübergängen gegeben sein. Damit ist dann sowohl die Durchbiegung als auch die Neigung an den Grenzflächen eindeutig durch bestimmte Werte definiert. Man spricht in diesem Fall von der sogenannten *C<sub>1</sub>-Stetigkeit*.

Es kann gezeigt werden, daß es unmöglich ist, für die Ansatzfunktionen einfache Polynomausdrücke anzugeben, die vollständige Kompatibilität sichern, wenn in den Knoten nur die Durchbiegung und ihre Neigungen vorgeschrieben werden [60]. Daher werden häufig Elemente mit inkompatiblen Ansatzfunktionen verwendet, deren Konvergenz allerdings nur gewährleistet ist, wenn sie mit Hilfe eines sogenannten Patch-Tests [29] nachgewiesen werden kann.

Hier wird dagegen ein Element verwendet, das durch die Einführung von zusätzlichen Freiheitsgraden auf kompatible Ansatzfunktionen führt: ein Rechteck mit hermiteschen Ansatzfunktionen.

Dieses Rechteck weist als Knotenparameter die Durchbiegung  $w$ , deren Neigungen  $\frac{\partial w}{\partial x}$  und  $\frac{\partial w}{\partial z}$  sowie die Verwindung der Biegefläche  $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}$  auf. Die Produktansätze werden aus Ansatzfunktionen in jede Richtung gebildet, die ein System Hermiteschen Polynomen erster Ordnung, d.h. ein System von Polynomen dritten Grades, darstellen.

### 3.1.2 FEM für die Wellenausbreitung in kompressiblen Fluiden

In der vorliegenden Arbeit werden Probleme der Schalldämmung von Trennbauteilen ausschließlich im Frequenzbereich untersucht, so daß sich die folgende Herleitung der Finite-Element-Methode für die Wellenausbreitung in kompressiblen Fluiden auf den eingeschwungenen Zustand beschränkt.

Die Energieanteile  $E_{pot}$  und  $E_{kin}$  ergeben sich dann in Abhängigkeit vom Schalldruck  $p$  wie in Kapitel 2.3 erläutert (Gleichungen (2.75), (2.76)). Zusätzlich soll hier am Rand des Gebietes die Arbeit des Schalldrucks an den Auslenkungen der Fluidpartikel in Normalenrichtung  $u_N$  berücksichtigt werden.

$$\begin{aligned} E_{kin} &= \frac{1}{2\rho c^2} \int_V p^2 dV \\ E_{pot} &= \frac{1}{2\rho\omega^2} \int_V \nabla p^2 dV \\ W &= \int_A (p \cdot u_N) dA \end{aligned}$$

Durch Einsetzen dieser Energieanteile in Gleichung (3.1) ergibt sich als zu minimierendes Funktional für die Herleitung der Finite-Element Formulierung eines kompressiblen Fluids die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} \chi &= E_{kin} - E_{pot} + W \\ &= \frac{1}{2\rho c^2} \int_V p^2 dV - \frac{1}{2\rho\omega^2} \int_V \nabla p^2 dV + \int_A (p \cdot u_N) dA \end{aligned} \quad (3.17)$$

Die Minimierungsbedingung (3.18) ergibt sich, wenn man die Diskretisierung des Fluidgebietes durchführt und den Schalldruck  $p$  in jedem finiten Element  $e$  durch das Produkt  $p = \mathbf{N}\mathbf{p}^e$  der Ansatzfunktionen  $\mathbf{N}$  und der Knotenwerte  $\mathbf{p}$  des Schalldrucks approximiert.

$$\frac{\partial \chi}{\partial p_i} = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad \text{da } \chi = \sum \chi^e \quad (3.18)$$

Mit  $i$  wird die Anzahl der Freiwerte bezeichnet. Für jedes Element ergeben sich dann mit den Elementkompressibilitätsmatrizen

$$K_{1ij}^e = \frac{1}{\rho\omega^2} \int_V \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) dV \quad (3.19)$$

und den Elementmassenmatrizen

$$K_{2ij}^e = \frac{1}{\rho c^2} \int_V N_i N_j dV \quad (3.20)$$

sowie dem Vektor der Randlasten im Element

$$d_i^e = \int_A N_i u_{Ni} dA \quad (3.21)$$

die Gleichungen

$$\left\{ \frac{\partial \chi}{\partial p_i} \right\}^e = \mathbf{K}^e \mathbf{p}^e + \mathbf{d}^e, \quad (3.22)$$

wobei in den Elementmatrizen  $\mathbf{K}^e$  die Massen- und Kompressibilitätsmatrizen zusammengefaßt sind.

Der gesamte Satz von Gleichungen für die Freiheitsgrade aller Knoten des Fluids ergibt sich analog zum Vorgehen bei der Formulierung für die Kirchhoffplatte, wenn man die Elementmatrizen und -vektoren aller Elemente zu den Gesamtmatrizen und -vektoren aufsummiert.

$$\left\{ \frac{\partial \chi}{\partial p} \right\} = \mathbf{K} \mathbf{p} + \mathbf{d} = \mathbf{0} \quad (3.23)$$

$$\text{mit:} \quad K_{ij} = \sum_{e=1}^n K_{ij}^e \quad d_i = \sum_{e=1}^n d_i^e \quad (3.24)$$

Damit kann ein Gleichungssystem für die Finite-Element-Methode zur Berechnung der Wellenausbreitung in kompressiblen Fluiden formuliert werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} \mathbf{p} &= \left( \frac{1}{\rho \omega^2} \mathbf{K}_1 - \frac{1}{\rho c^2} \mathbf{K}_2 \right) \mathbf{p} = \mathbf{d} \\ \left( \mathbf{K}_1 - k^2 \mathbf{K}_2 \right) \mathbf{p} &= \rho \omega^2 \mathbf{d} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Auf der rechten Seite geht formal die Belastung durch den am Rand vorgegebenen Schallfluß in die FE-Gleichung ein. Mit Hilfe dieses Lastvektors können allerdings auch unterschiedliche Randbedingungen (schallhart, schallweich oder absorbierend; vgl. Kapitel 2.3.3) an Begrenzungsflächen modelliert werden: Dazu wird die Beziehung (2.95) zwischen dem Schalldruck  $p_i$  und der Außennormalgeschwindigkeit  $v_{Ni}$  des Knotens  $i$  ausgenutzt, die für lokal agierende Randknoten gültig ist.

Für harmonische Schwingungen kann nun die Außennormalgeschwindigkeit mit Hilfe der Auslenkung des Knotens  $i$  in Normalenrichtung  $u_{Ni}$  wie folgt ersetzt werden:

$$p_i = i \omega z^o \cdot u_{Ni} \quad \text{bzw.} \quad u_{Ni} = \frac{1}{i \omega z^o} \cdot p_i \quad (3.26)$$

Mit dem oben eingeführten Wellenwiderstand des Fluids (2.96) ergibt sich der Vektor der Quellen und Senken folgendermaßen

$$d_i^e = \int_A N_i u_{N_i} dA = \frac{p_i}{i\omega z^o} \int_A N_i dA = \frac{p_i}{i\omega \rho c} \int_A N_i dA \quad . \quad (3.27)$$

Das Gesamtgleichungssystem geht bei der Berücksichtigung der Wandimpedanzen in ein System von komplexen Gleichungen über. Die Hauptdiagonalelemente der Systemmatrix ergeben sich dann zu:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}'_{ii} &= \frac{1}{\rho\omega^2} \int_V \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_i}{\partial z} \right) dV \\ &\quad - \frac{1}{\rho c^2} \int_V \left( N_i N_i \right) dV \\ &\quad - i \cdot \frac{1}{\omega \rho c} \int_A N_i dA \end{aligned} \quad (3.28)$$

Das Gesamtgleichungssystem der Finite-Element-Methode für kompressible Fluide erhält man damit zu

$$\mathbf{K}' \mathbf{p} = -\mathbf{d}, \quad (3.29)$$

wobei in der Systemmatrix  $\mathbf{K}'$  die Kompressibilitäts- und die Massenmatrix sowie die komplexen Hauptdiagonaleinträge zusammengefaßt sind.

### Diskretisierung des Schalldrucks

Die Diskretisierung des Schalldrucks muß analog zur Diskretisierung der Plattenverformungen die beschriebenen Konvergenzkriterien erfüllen [108].

Allerdings muß für die Diskretisierung des Schalldrucks lediglich  $C_0$ -Stetigkeit gefordert werden, da in den Integranden der zu berücksichtigenden Arbeitsanteile (Gln. (3.20)–(3.21)) höchstens erste Ableitungen auftreten. Es liefern damit schon Hexaeder mit linearen Ansätzen konvergente Lösungen.

## 3.2 Randelementmethode (REM)

### 3.2.1 REM für die Wellenausbreitung in kompressiblen Fluiden

Die Randelementmethode basiert auf einer integralen Beschreibung des akustischen Randwertproblems. Die Randintegralgleichung kann *direkt* oder *indirekt* formuliert werden, wenn das zu betrachtende Gebiet im physikalischen Sinne homogen ist und eine sogenannte *Fundamentallösung* der Differentialgleichung bekannt ist. Zunächst wird daher die Ermittlung der Fundamentallösung für die Helmholtz-Gleichung und die Herleitung der Randintegralgleichung mit Hilfe der direkten bzw. indirekten Methode vorgestellt, um zum Schluß dieses Abschnitts zur Randelementgleichung zu gelangen.



### Fundamentallösung der 3-d Helmholtz-Gleichung

Die Fundamental- oder Grundlösung beschreibt die Reaktionen im Vollraum auf eine an der Stelle  $\xi$  wirkende Punktquelle der Intensität 1. Die Fundamentallösung muß also die inhomogene Differentialgleichung

$$p_{,ii}^*(\mathbf{x}, \xi) + k^2 p^*(\mathbf{x}, \xi) = -\delta(\mathbf{x} - \xi) \quad (3.30)$$

erfüllen, wobei mit  $\delta(\mathbf{x} - \xi)$  die Dirac-Funktion bezeichnet wird, eine verallgemeinerte Funktion aus der Klasse der Distributionen. Bei dreidimensionalen Problemstellungen handelt es sich im physikalischen Sinne um einen Kugelstrahler nullter Ordnung.

Die Dirac-Funktion hat die folgende spezielle Eigenschaft. Es gilt für  $\xi \in \Omega$

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \xi) d\Omega = f(\xi). \quad (3.31)$$

Die Filtereigenschaft (3.31) ist für beliebige Funktionen  $f(\mathbf{x})$  gültig. Die Dirac-Funktion filtert den Funktionswert des Integranden an der Stelle  $\xi$  heraus, was bei der Randelementmethode gezielt ausgenutzt wird.

Für Abstrahlprobleme mit auslaufenden Wellen ergibt sich die Fundamentallösung  $p^*$  als Lösung der Gleichung (3.30) zu

$$p^*(\mathbf{x}, \xi) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r} e^{i\kappa r} \quad (3.32)$$

$$\text{mit:} \quad r := |\mathbf{x} - \xi|. \quad (3.33)$$

Diese Fundamentallösung erfüllt wegen der beschriebenen Eigenschaft der Dirac-Funktion in allen Punkten  $\mathbf{x}$  die homogene Differentialgleichung außer im sogenannten Quellpunkt  $\xi$ . In diesem Punkt, d.h. für  $r = |\mathbf{x} - \xi| = 0$  weist die Fundamentallösung eine Singularität auf.

Differenzieren von Gleichung (3.32) in Normalenrichtung liefert die Fundamentallösung für den Schallfluß:

$$q^*(\mathbf{x}, \xi) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{r^2} (1 - i\kappa r) e^{i\kappa r} r_{,n} \quad (3.34)$$

Sowohl die Fundamentallösung  $p^*$  als auch ihr Fluß  $q^*$  sind implizit von der Wellenzahl  $\kappa$  abhängig.

### Herleitung der direkten Randintegralgleichung

Die direkte Formulierung der Integralgleichung für kompressible Fluide kann über die Greenschen Formeln hergeleitet werden. Aus der Reziprozitätsbeziehung folgt, wenn man keine Volumenkräfte im Innern zuläßt, daß die Energieänderung durch innere Quellen und durch den Randfluß eines Systems am Druck eines zweiten Systems gleich der Energieänderung durch Quellen und Randfluß des zweiten Systems am Druck des ersten Systems ist.

$$\int_{\Omega} a^2(\mathbf{x}) p^1(\mathbf{x}) d\Omega_x + \int_{\Gamma} q^2(\mathbf{x}) p^1(\mathbf{x}) d\Gamma_x = \int_{\Omega} p^2(\mathbf{x}) a^1(\mathbf{x}) d\Omega_x + \int_{\Gamma} p^2(\mathbf{x}) q^1(\mathbf{x}) d\Gamma_x \quad (3.35)$$

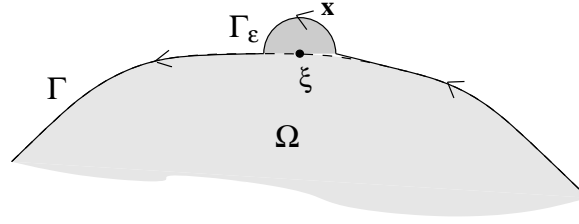


Abbildung 3.1: Umgebung um den singulären Punkt

Wählt man als Quelle  $a$  des Systems 2 einen Kugelstrahler nullter Ordnung an der Stelle  $\xi$ , also die Dirac-Funktion, so können die Eigenschaften der Fundamentallösung am System 1 berücksichtigt werden. Setzt man die Dirac-Funktion in den Integranden des Volumenintegrals auf der linken Seite ein, so kann dieses Integral entsprechend (3.31) ausgewertet werden. Damit kann die Gleichung (3.35) in der folgenden Form geschrieben werden:

$$p(\xi) = \int_{\Gamma} (q(\mathbf{x})p^*(\mathbf{x}, \xi) - p(\mathbf{x})q^*(\mathbf{x}, \xi)) d\Gamma_x + \int_{\Omega} a(\mathbf{x})p^*(\mathbf{x}, \xi) d\Omega_x \quad \text{für } \xi \in \Omega \quad (3.36)$$

Diese Gleichung stellt einen Zusammenhang zwischen dem Schalldruck  $p(\xi)$  des beliebig wählbaren Quellpunktes und den Randfunktionen  $q(\mathbf{x})$  bzw.  $p(\mathbf{x})$  her. Verschiebt man den Quellpunkt auf den Rand, so besteht dieser Zusammenhang nur noch zwischen den Randwerten selbst. Damit erhält man eine Randintegralgleichung, deren Lösung gerade die unbekannten, nicht durch die Randbedingungen festgelegten Randwerte liefert, nämlich  $q(\mathbf{x})$  auf  $\Gamma_1$  und  $p(\mathbf{x})$  auf  $\Gamma_2$ .

Da die Fundamentallösung im Quellpunkt singulär ist (vgl. 3.32), muß über diese Singularität integriert werden, wenn der Quellpunkt auf den Rand verschoben wird. Um dies zu realisieren, wird der Quellpunkt zunächst noch als Innenpunkt aufgefaßt und gedanklich von einer kugelförmigen  $\epsilon$ -Umgebung mit dem Rand  $\Gamma_\epsilon$  umschlossen (s. Abb. 3.1). Damit erfolgt die Integration in der Gleichung (3.36) über den in zwei Teile aufgespaltenen Rand. Der Grenzübergang  $\epsilon \rightarrow 0$  liefert die *Randintegralgleichung*

$$c(\xi)p(\xi) + \int_{\Gamma} q^*(\mathbf{x}, \xi; \kappa)p(\mathbf{x}) d\Gamma_x = \int_{\Gamma} p^*(\mathbf{x}, \xi; \kappa)q(\mathbf{x}) d\Gamma_x + \int_{\Omega} a(\mathbf{x})p^*(\mathbf{x}, \xi; \kappa) d\Omega_x. \quad (3.37)$$

Der Faktor vor dem integralfreien Term ist gegeben durch

$$c(\xi) = 1 + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} q^*(\mathbf{x}, \xi) d\Gamma_\epsilon. \quad (3.38)$$

Die Singularität im Punkt  $\xi$  und die Geometrie der Randes geht in die Auswertung des zweiten Summanden der Gleichung (3.38) ein. Das Integral läßt sich physikalisch als Fluß deuten, der bei der Fundamentallösung durch den Teilrand  $\Gamma_\epsilon$  im Grenzübergang  $\epsilon \rightarrow 0$  strömt. Der Faktor  $c(\xi)$  ergibt sich, wenn das Integral mit der linken Seite von Gleichung (3.36) zusammengefaßt wird. Für eine Einheitsquelle bei glattem Rand ergibt sich  $c(\xi) = 0,5$ .

### Herleitung der indirekten Randintegralgleichung

Bei der indirekten Methode zur Herleitung der Randintegralgleichung wird zunächst eine Quellbelegung auf einem fiktiven Rand  $\Gamma$  so bestimmt, daß die dadurch auf dem realen Rand  $\Gamma^+$  erzeugten Zustandgrößen mit den dort vorgeschriebenen Randwerten des Systems übereinstimmen. Der Abstand des fiktiven zum realen Rand betrage  $\delta$ . Die physikalisch interessierenden Größen können im Anschluß aus der Quellbelegung ermittelt werden.

Die Quellbelegung ist für ein Dirichletsches Randwertproblem mit bekannten Schalldrücken  $\bar{p}(\bar{\mathbf{x}})$  auf dem realen Rand  $\Gamma^+$  durch

$$\int_{\Gamma} p^*(\bar{\mathbf{x}}, \xi(s)) F(s) ds = \bar{p}(\bar{\mathbf{x}}) \quad \text{für } \bar{\mathbf{x}} \in \Gamma^+ \quad (3.39)$$

zu ermitteln, wobei mit  $F(s)$  die Intensität der Quellen bezeichnet wird.

Analog ist für ein Neumannsches Randwertproblem, bei dem auf dem realen Rand  $\Gamma^+$  der Schallfluß  $\bar{q}(\bar{\mathbf{x}})$  vorgeschrieben ist, mit der folgenden Integralgleichung die Quellbelegung auf dem fiktiven Rand  $\Gamma$  zu ermitteln:

$$q^*(\bar{\mathbf{x}}) F(\bar{\mathbf{x}}) + \int_{\Gamma} q^*(\bar{\mathbf{x}}, \xi(s)) F(s) ds = \bar{q}(\bar{\mathbf{x}}) \quad \text{für } \bar{\mathbf{x}} \in \Gamma^+ \quad (3.40)$$

Anschließend lassen sich der Schalldruck und der Fluß in Richtung des Normalenvektors bestimmen.

$$p(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} p^*(\mathbf{x}, \xi(s)) F(s) ds \quad (3.41)$$

$$q(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} q^*(\mathbf{x}, \xi(s)) F(s) ds \quad (3.42)$$

In den Gleichungen (3.41) und (3.42) treten nur reguläre Integrale auf, sofern fiktiver und realer Rand einen endlichen Abstand aufweisen, d.h.  $\delta \neq 0$  gilt. Für den Spezialfall, daß beide Ränder zusammenfallen, ist diese Bedingung nicht erfüllt und man spricht deshalb von der singulären, indirekten Methode.

### Randelementgleichung

Die Randintegralgleichungen - ob direkt oder indirekt formuliert - lassen sich in der Regel nicht exakt lösen. Die Randintegralgleichung läßt sich in die *Randelementgleichung* (3.43) überführen, in dem der Rand  $\Gamma$  diskretisiert wird, d.h. in endlich viele Randelemente aufgeteilt wird, und die beiden Schallfeldgrößen Schalldruck  $p$  und -fluß  $q$  in jedem Randelement durch Ansatzfunktionen approximiert werden. Da im Folgenden ausschließlich die direkte Formulierung Anwendung finden wird, beschränken sich die weiteren Anmerkungen auf diese Methode:

Die Diskretisierung erfolgt in der Form  $p = \mathbf{N}_p \mathbf{p}$  bzw.  $q = \mathbf{N}_q \mathbf{q}$ , wobei in den Vektoren  $\mathbf{N}_p$  bzw.  $\mathbf{N}_q$  die Ansatzfunktionen und in  $\mathbf{p}$  bzw.  $\mathbf{q}$  die Werte des Schalldrucks und Schallflusses an den Knoten zusammengefaßt werden. Die unbekannten Knotenwerte lassen sich durch punktweise Auswertung der Integralgleichung (Kollokation) oder mit Hilfe des Galerkin-Verfahrens ermitteln:

$$\mathbf{Gq} - \mathbf{Hp} = \mathbf{0}. \quad (3.43)$$

Mit Gleichung (3.43) kann der unbekannte Schalldruck  $\mathbf{p}$  an einem Neumannrand mit bekanntem Schallfluß  $\bar{\mathbf{q}}$  bzw. der Schallfluß  $\mathbf{q}$  an einem Dirichletrand mit bekanntem Schalldruck  $\bar{\mathbf{p}}$  durch Auflösen der algebraischen Gleichungen berechnet werden. Die Matrizen  $\mathbf{G}$  und  $\mathbf{H}$  werden häufig als Einflußmatrizen bezeichnet. Sie entsprechen im wesentlichen den Integralbeiträgen über die Randelemente.

### 3.2.2 Nichteindeutigkeit der Integraldarstellung

In Abschnitt 2.3.2 wurde aufgezeigt, daß Dirichlet- und Neumannaußenraumprobleme eindeutig lösbar sind, die zugehörigen Innenraumprobleme zumindest für gedämpfte Schwingungen, also komplexe Wellenzahlen.

Für das Neumannsche Außenraumproblem ergibt sich bei der Integraldarstellung bezüglich der Eindeutigkeit jedoch eine Besonderheit. Es treten für reelle Wellenzahlen  $\kappa$  charakteristische Werte auf, zu denen Eigenlösungen existieren. Man bezeichnet diese im allgemeinen als *fiktive Eigenfrequenzen*, da sie im Gegensatz zu den Eigenlösungen von Innenraumproblemen keinerlei physikalische Bedeutung haben und nur auf dem Wesen der Integraldarstellung beruhen [107].

Diese nicht-trivialen Lösungen für reelle  $\kappa$  der Gleichung des Neumannschen Außenraumproblems treten auf, da sich bei der Integraldarstellung die Frage nach deren Lösbarkeit auf die Frage der Lösbarkeit des homogenen Dirichletschen Innenraumproblems reduziert [18]. Die Eindeutigkeitsaussagen für das homogene Dirichletsche Innenraumproblem lassen sich auf das Neumannsche Außenraumproblem übertragen [53]:

Für ungedämpfte Schwingungen weist das homogene Innenraumproblem keine eindeutige Lösung auf. Für die komplexen Wellenzahlen von verlustbehafteten Ausbreitungsmedien weist das homogene Dirichletsche Innenraumproblem eine eindeutige Lösung auf, wodurch man auf eine eindeutige Integraldarstellung des zugehörigen Neumannschen Außenraumproblems bei verlustbehafteter Schallausbreitung schließen kann.

Die Frage nach der Eindeutigkeit der inhomogenen Form des Neumannschen Außenraumproblems läßt sich mit Hilfe der Fredholmschen Theorie beantworten [18, 98]: Die inhomogene Gleichung besitzt danach eine eindeutige Lösung, wenn die homogene Form nur die triviale Lösung besitzt. Für die Anwendung dieser Aussage ist der Nachweis der Kompaktheit der Operatoren erforderlich, der sich in der zitierten Literatur findet. Läßt sich außerdem die Existenz der Lösung des inhomogenen Problems nach der Fredholmschen Theorie nachweisen, so können die getroffenen Feststellungen bezüglich der Eindeutigkeit für solche Probleme übernommen werden. In ausführlicher Form finden sich Anmerkungen zur Eindeutigkeit der Integraldarstellung z.B. bei Tröndle [101].

Da die fiktiven Eigenfrequenzen der Integraldarstellung des Neumannschen Außenraumproblems nicht auf physikalische Ursachen zurückzuführen sind, sind bei der Betrachtung solcher Problemstellung Maßnahmen zur Konstruktion einer eindeutigen Lösungen notwendig. Weit verbreitet sind in diesem Zusammenhang die CHIEF-Methode von Schenk [92] und die Methode von Burton und Miller [19]. Bei der CHIEF-Methode (Combined Helmholtz Integral Equations Formulation) wird die Helmholtzgleichung auf der Oberfläche mit der Formulierung für den Innenraum kombiniert. Beim Verfahren von Burton und Miller wird eine Linearkom-

bination aus der Standard Helmholtz-Integralgleichung und ihrer Normalenableitung an der Oberfläche gebildet, die bei geeigneter Wahl der Koppelparameter nur eine Lösung besitzt.

Auf die Maßnahmen zur Konstruktion einer eindeutigen Lösung soll hier nicht vertieft eingegangen werden, da die Randintegralgleichung als Grundlage der Randelementmethode in der vorliegenden Arbeit ausschließlich dafür verwendet werden soll, halbunendliche Gebiete zu untersuchen, die an einer Koppelfläche mit einer Struktur verbunden sind, an der zunächst keine Feldgröße bekannt ist. Bei den zu untersuchenden Problemstellungen handelt es sich damit nicht um reine Neumannsche Außenraumprobleme, so daß fiktive Eigenfrequenzen nicht auftreten werden.

### 3.2.3 REM bei Halbraum-Problemen

Die Randelementmethode eignet sich zur Analyse von Innenraum- und Außenraumproblemen, wie dies im vorherigen Abschnitt dargelegt ist. Einige Ingenieurprobleme fallen unter eine andere Gruppe, die sogenannten Halbraumprobleme. Dies sind halbunendliche Probleme, bei denen das Gebiet nicht geschlossen ist. Ein typisches Beispiel für Halbraumproblemstellungen ist die Spannungs- oder Schwingungsanalyse von Böden. Der Boden stellt dabei das halbunendliche Gebiet dar, die Bodenoberfläche den Rand des Gebietes.

Zur Umsetzung des numerischen Verfahrens für die Behandlung von Schalltransmissionsvorgängen wird die Verwendung eines halbunendlichen Gebietes notwendig (vgl. Kapitel 4), so daß hier kurz auf Besonderheiten der REM bei Halbraumproblemen eingegangen wird.

Die Randelementformulierung für den Vollraum, wie sie in den vorherigen Abschnitten vorgestellt wurde, erfordert die Diskretisierung des gesamten Randes des zu untersuchenden Gebiets. Wenn die Randelementmethode auf Probleme mit einem halbunendlichen Gebiet angewendet wird, muß die Diskretisierung in einem noch zu bestimmenden Abstand vom Lasteinleitungsgebiet abgebrochen werden. Durch den Diskretisierungsabbruch ist die Randelementlösung fehlerbehaftet, allerdings beeinflussen diese Abbruchfehler nur einen relativ kleinen Bereich in der Nähe des Diskretisierungsabbruchs, so daß sich keine signifikante Verfälschungen der Ergebnisse an den anderen Bereichen ergeben; dies wurde von verschiedenen Autoren festgestellt und eingehend diskutiert [31, 32, 67].

Aufgrund dieser Studien wird für die vorliegende Problemstellung, bei der die Koppelfläche mit der Struktur gleichzeitig die Lasteinleitungszone darstellt (vgl. Kapitel 4), die Diskretisierungsoberfläche so groß gewählt, daß sie in jeder Ausdehnungsrichtung ca. dreimal der Größe der Lasteinleitungszone entspricht, der Abbruch der Diskretisierung also weit genug von der hauptsächlich interessierenden Koppelfläche entfernt ist.

Für akustische Problemstellungen, deren Lösung sensibler gegenüber dem Abbruch der Diskretisierung sind, wurden von Harari/Barbone/Slavutin/Shalom sogenannte infinite Randelemente vorgeschlagen, die am Rand der Diskretisierung an die Randelemente gekoppelt werden [55].

Zur Behandlung von halbunendlichen Gebieten mit der Randelementmethode für den Vollraum gibt es eine Alternative, die keine Probleme bezüglich des Diskretisierungsabbruchs aufweist, da die freie Halbraumberandung nicht diskretisiert zu werden braucht: Bei dieser Methode wird die Fundamentallösung für den Halbraum verwendet, um das Schallfeld eines halb-

unendlichen Gebietes zu berechnen [95, 96]. Die Halbraumfundamentallösung stellt sicher, daß die Randbedingungen an der freien Oberfläche des Halbraumes erfüllt sind. Bei Verwendung einer derartigen Randelementmethode von Li/Wu/Seybert [76] für den Halbraum können neben schallweicher und schallharter auch beliebige Impedanzen des Halbraumrandes berücksichtigt werden, dennoch sind die Einsatzmöglichkeiten auf spezielle Problemstellungen mit ebenen Randflächen beschränkt.

## 4 Modellierung der Fluid – Struktur Interaktion

Mit den im vorherigen Kapitel beschriebenen numerischen Berechnungsverfahren liegen nun die Werkzeuge zur Simulation von Schalltransmissionsvorgängen vor. Die zu modellierenden Teilgebiete (luftgefüllter Raum des Gebäudes, Glasscheiben, gasgefüllter Scheibenzwischenraum, umgebende Luft) können allerdings nicht getrennt voneinander untersucht werden, denn das Modell für die Schalltransmission beruht, wie in Abschnitt 2 erläutert, auf der Anregung von Schwingungen der Glasscheiben durch den Schall im Fluid und der Abstrahlung von Schall durch die schwingende Glasscheibe in die umgebende Luft. Damit ist z.B. die Dynamik der Struktur abhängig vom Schallfeld in der Luft. Die Berechnungsansätze müssen daher gekoppelt werden. Die Abhängigkeit hat auch in umgekehrter Richtung Gültigkeit, so daß auch die Rückwirkung für den Schalltransmissionsmechanismus von Bedeutung ist.

Im weiteren werden zwei grundlegend unterschiedliche Kopplungsstrategien aufgezeigt: Zum einen die Kopplung von Struktur und Fluid ohne die Einbeziehung von Rückwirkungseffekten (s. Abschnitt 4.1) und zum anderen die vollständige Kopplung unter Berücksichtigung der tatsächlichen Interaktionen (s. Abschnitt 4.2). Es wird aufgezeigt, daß letztere Strategie im Gegensatz zum Verfahren ohne die Berücksichtigung von Wechselwirkungseffekten die Schalltransmission durch Isolierfenster zutreffend abbilden kann.

### 4.1 Kopplung ohne Einbeziehung der Rückwirkung

Bei der Kopplung ohne Einbeziehung von Rückwirkungseffekten wird eine separate Berechnung für die unterschiedlichen Teilgebiete eines Systems vorgenommen. Die Kopplung wird realisiert, indem das Ergebnis der Berechnung für ein Teilgebiet als Last auf das nächste Teilgebiet aufgebracht wird. In der Literatur wird dieses Vorgehensweise häufig als *Loose Coupling* bezeichnet.

Mit dieser Methode können auch Berechnungen von Schalltransmissionen vorgenommen werden. Dies soll zunächst an einem einfachen Beispiel, dem Schalldurchgang durch eine einzelne Platte, erläutert werden. Sowohl vor, als auch hinter der Platte befinde sich ein abgeschlossener Raum, der mit einem kompressiblen Fluid gefüllt sei. Für die Platte und für das akustische Medium wird daher als Berechnungsverfahren die Finite-Element-Methode herangezogen (s. Abb. 4.1). Es sind folgende Berechnungsschritte durchzuführen:

1. Ermittlung des Schallfeldes aufgrund von gegebenen Randgrößen im ersten akustischen Medium  $\Omega_{IR1}$ , unter der Annahme, daß die Strukturoberfläche schallhart ist.
2. Berechnung der Schwingungen der Platte  $\Omega_{P1}$  mit dem Schalldruck an der Struktur aus Berechnungsschritt 1.) als Last.
3. Ermittlung des Schallfeldes im zweiten akustischen Medium  $\Omega_{IR2}$ , wobei die Auslenkungen der Plattenknoten nach Berechnungsschritt 2.) als Last (vgl. Gl. (3.27)) berücksichtigt werden.

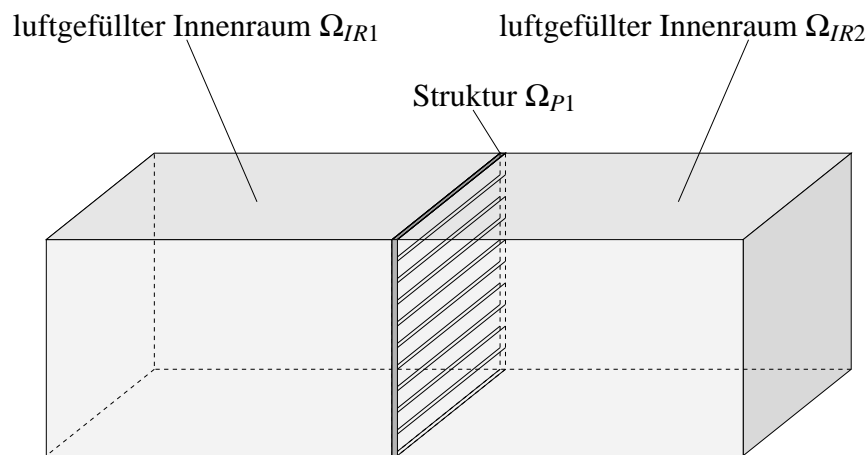


Abbildung 4.1: Modell zweier luftgefüllter Räume mit einer trennenden Platte

Diese Vorgehensweise vereinigt einige Vorteile. Da die Berechnung der Teilgebiete einzeln erfolgt, ließen sich diese mit bestehenden Programmen, z.B. auch kommerziellen, durchführen. Notwendig wird nur eine geeignete Umsetzung der Schnittstelle, d.h. die Ergebnisse der einzelnen Programme müssen so aufbereitet werden, daß sie wiederum von den anderen eingelesen werden können. Ein weiteres, auch bei den heute zur Verfügung stehenden Rechnerressourcen immer noch wesentliches Argument für die Verwendung eines *Loose Coupling* Algorithmus ist in der separaten Lösung des gekoppelten Problems zu finden: Die Gleichungssysteme aus den numerischen Berechnungsverfahren für die unterschiedlichen Teile werden getrennt voneinander gelöst. Der Speicheraufwand und auch die benötigte Zeit, um das Gleichungssystem zu lösen, ist damit im Vergleich zu einem völlig gekoppelten Berechnungsalgorithmus wesentlich geringer.

Allerdings sprechen wichtige Tatsachen gegen die Verwendung einer solchen Kopplungsstrategie: So stellt die Annahme einer schallharten Strukturoberfläche im ersten Berechnungsschritt eine das reale Problem mehr oder weniger stark verfälschende Vereinfachung dar. Vor allem aber werden durch einen derartigen Algorithmus die Interaktionen zwischen der Struktur und dem Fluid nicht erfaßt. Welchen Einfluß dies auf die Qualität der Lösung hat, werden die Ergebnisse der Studien im Abschnitt 4.3 zeigen.



## 4.2 Vollständige Kopplung mittels des Prinzips der virtuellen Arbeiten (PvA)

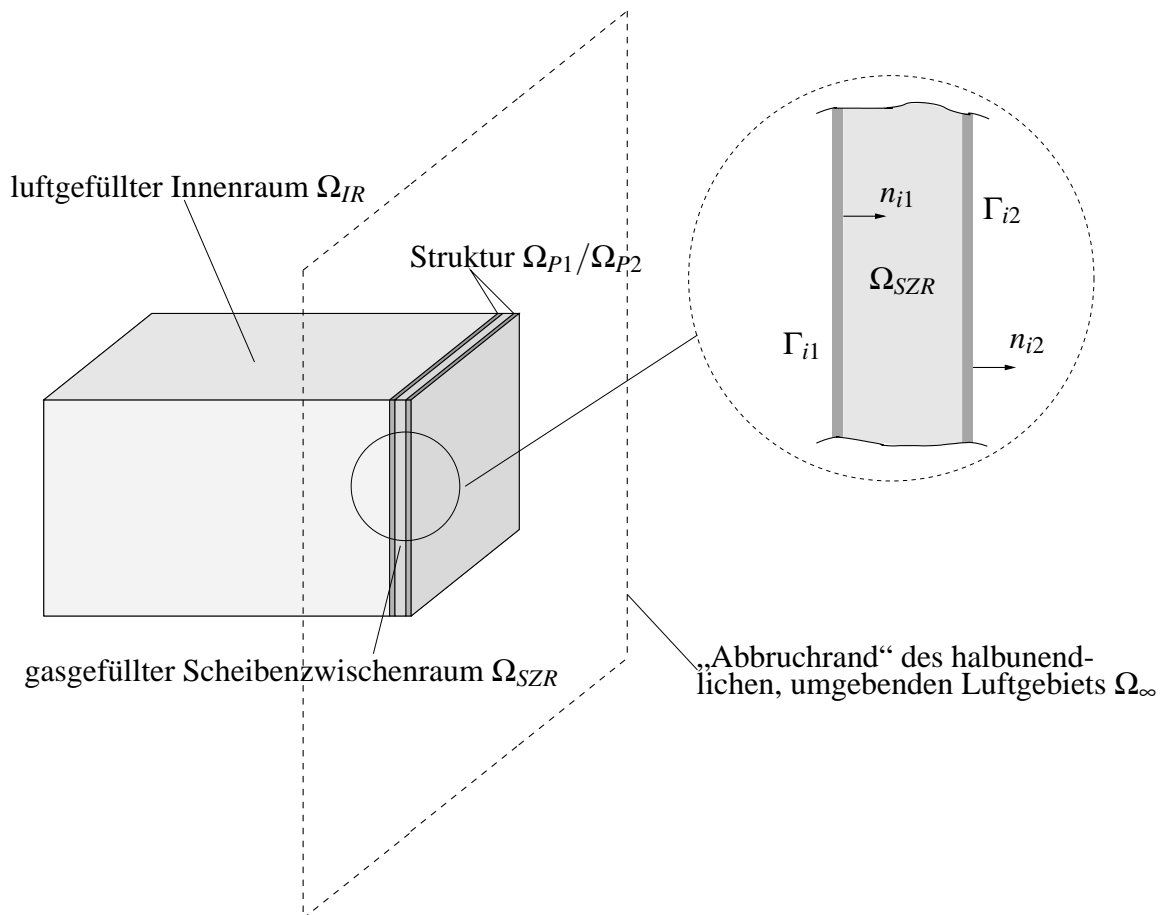


Abbildung 4.2: Modell eines Isolierfensters mit Doppelverglasung

Die Rück- und Wechselwirkungen der Teile eines Isolierfensters können nur mit Hilfe einer vollständigen Kopplung des Modells berücksichtigt werden. Dabei ist zu beachten, daß mehrere Koppelflächen zwischen den Teilsystemen bestehen (s. Abb. 4.2). So wird der luftgefüllte Innenraum  $\Omega_{IR}$  vom gasgefüllten Scheibenzwischenraum (SZR)  $\Omega_{SZR}$  durch die raumseitige Glasscheibe des Fensters  $\Omega_{P1}$  getrennt. Beide Seiten der Struktur sind also in Kontakt mit einem Fluidgebiet, die Strukturoberfläche stellt die sogenannte Koppelfläche  $\Gamma_{i1}$  dar. Ähnlich verhält es sich mit der äußeren Glasscheibe  $\Omega_{P2}$ : Sie trennt den gasgefüllten Scheibenzwischenraum von der das Gebäude umgebenden Luft. Sie ist also sowohl mit dem Gebiet  $\Omega_{SZR}$  als auch mit dem halbbunendlichen Außenraum  $\Omega_{\infty}$  in Berührung und bildet die zweite Koppelfläche  $\Gamma_{i2}$ .

Die unterschiedlichen Teile sollen aus den beschriebenen Gründen mit verschiedenen numerischen Berechnungsverfahren - der Finite-Element-Methode bzw. der Randelementmethode - behandelt werden. Es ist deshalb zum einen die Kopplung unterschiedlicher Methoden und

zum anderen unterschiedlicher mechanischer Strukturen notwendig: die FE/FE/FE-Kopplung von Kirchhoffplatte mit den abgeschlossenen kompressiblen Fluidgebieten für die innere Glasscheibe und die FE/FE/RE-Kopplung von Scheibenzwischenraum, also einem abgeschlossenen Fluidgebiet, Kirchhoffplatte und Außenraum. Im Folgenden sollen die Strategien für die Kopplung von Kirchhoffplatte und kompressiblen Fluid zunächst für den Sonderfall aufgezeigt werden, daß die Platte jeweils nur an einer Seite mit einem Fluid (einem Innen- oder Außenraum) in Kontakt ist.

#### 4.2.1 Kopplung von FEM der Kirchhoffplatte mit FEM für ein kompressibles Fluid

Im Abschnitt 3.1 ist dargelegt, wie das Hamiltonsche Prinzip den Ausgangspunkt zur Herleitung der Finite-Element-Methode liefern kann. Es liegt nahe, daß mit diesem Prinzip auch ein Zugang zur Kopplung der Finite-Element Formulierungen von Kirchhoffplatte und kompressiblen Fluid im Frequenzbereich gegeben ist. Das Funktional nach (3.1) muß also ein Minimum einnehmen bzw. es muß die folgende Variationsgleichung erfüllt sein.

$$\delta(E_{kin} - E_{pot}) + \delta W = 0 \quad (4.1)$$

Die Variation von kinetischer und potentieller Energie führt auf die Massenmatrizen und die Steifigkeits- bzw. Kompressibilitätsmatrix der FE-Systeme (s. Glgn. (3.16), (3.25)). Der Term  $\delta W$  kann für die Kopplung der akustischen und strukturellen Freiheitsgrade verwendet werden und zwar sowohl für den Fall des einseitigen, als auch des beidseitigen Kontakts der Platte mit einem Fluidgebiet.

##### FE/FE-Kopplung einer Platte mit einseitigem Fluidkontakt

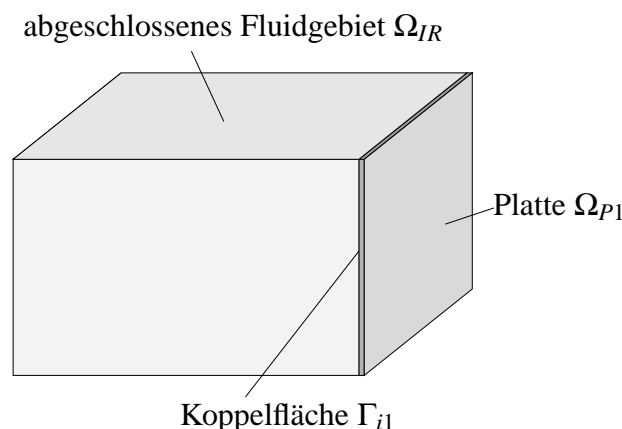


Abbildung 4.3: Kirchhoffplatte gekoppelt mit einem abgeschlossenen Fluidgebiet

An der Koppelfläche  $\Gamma_{i1}$ , also dort wo das Fluid  $\Omega_{IR}$  in Berührung mit der Platte  $\Omega_{P1}$  kommt, wird vom Schalldruck Arbeit an den Verschiebungen der Struktur geleistet (s. Abb.

4.3). Ebenso leisten die Verschiebungen der Struktur Arbeit am Schalldruck im Fluid. Es muß hier also das Produkt aus Schalldruck und den Plattendurchbiegungen über die Koppelfläche integriert werden. Für die FE-Gleichung des kompressiblen Fluids ergibt sich die virtuelle Arbeit zu

$$\delta W = \int \delta p w d\Gamma_{(i1)}. \quad (4.2)$$

Analog kann die virtuelle Arbeit an der Koppelfläche für die strukturelle FE-Gleichung durch

$$\delta W = \int p \delta w d\Gamma_{(i1)} \quad (4.3)$$

ausgedrückt werden.

Als Freiheitsgrade an den Plattenknoten liegen, wie in Abschnitt 3.1.1 beschrieben, neben der Durchbiegung  $w$  auch ihre partiellen Ableitungen  $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial x \partial z}$  vor. Deshalb ist es, bevor man zu einem gekoppelten Finite-Element Gleichungssystem für die Kirchhoffplatte und das Fluid gelangt, notwendig, diese Freiheitsgrade der Platte so zu kondensieren, daß ausschließlich die Durchbiegungen an den Knoten verbleiben. Es ergibt sich damit folgendes System von algebraischen Gleichungen mit den FE-Gleichung für das Fluid

$$\left( \mathbf{K}_1 - k^2 \mathbf{K}_2 \right) \mathbf{p}^{(IR)} = \rho \omega^2 \mathbf{C}^T \mathbf{w}_{i1}^{(P1)} \quad (4.4)$$

und den FE-Gleichungen für die Platte

$$\left( \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} \right)^* \mathbf{w}^{(P1)} = \mathbf{C} \mathbf{p}_{i1}^{(IR)}. \quad (4.5)$$

In Gleichung (4.5) wird mit  $(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})^*$  die dynamische Steifigkeitsmatrix der Platte nach der Kondensation bezeichnet. In den Vektoren  $\mathbf{w}_{i1}^{(P1)}$  und  $\mathbf{p}_{i1}^{(IR)}$  sind die Knotenwerte der Plattendurchbiegung und des Schalldrucks an der Koppelfläche  $\Gamma_{i1}$  zusammengefaßt.  $\mathbf{C}$  ist die Kopp lungsmatrix an dieser Koppelfläche. Sie ist durch die Ansatzfunktionen  $N_s$  und  $N_a$  abhängig von der gewählten Diskretisierung für die Struktur und für das akustische Medium und ergibt sich aus den Gleichungen (4.2) und (4.3) durch einige Umformungen.

Für die Strukturgleichung (4.3) läßt sich der Arbeitsanteil an der Koppelfläche wie folgt schreiben.

$$\delta W = \int \mathbf{N}_a \mathbf{p} \mathbf{N}_s \delta \mathbf{w} d\Gamma_{(i1)} = \int \mathbf{p}^T \mathbf{N}_a^T \mathbf{N}_s \delta \mathbf{w} d\Gamma_{(i1)} \quad (4.6)$$

Durch Transponieren des vorherigen Ausdrucks ergibt sich

$$\int (\mathbf{N}_a^T \mathbf{N}_s \delta \mathbf{w})^T \mathbf{p} d\Gamma_{(i1)} = \int (\mathbf{N}_s \delta \mathbf{w})^T \mathbf{N}_a \mathbf{p} d\Gamma_{(i1)} = \int \delta \mathbf{w}^T \mathbf{N}_s^T \mathbf{N}_a \mathbf{p} d\Gamma_{(i1)}. \quad (4.7)$$

Daraus ergibt sich die Lastseite der strukturellen FE-Gleichung, wenn man das Produkt der Ansatzfunktionen integriert über die Koppelfläche als Kopplungsmatrix bezeichnet:

$$\delta \mathbf{w}^T \int \mathbf{N}_s^T \mathbf{N}_a d\Gamma_{(i1)} \mathbf{p} \implies \mathbf{f}_{i1} = \mathbf{C} \mathbf{p}_{i1}^{(IR)} \quad (4.8)$$

Der Lastvektor für die FE-Gleichung ergibt sich durch Einsetzen der diskretisierten akustischen und Struktur-Freiheitsgrade in den Arbeitsausdruck (4.2).

$$\delta W = \int \mathbf{N}_a \delta \mathbf{p} \mathbf{N}_s \mathbf{w} d\Gamma_{(i1)} = \int \delta \mathbf{p}^T \mathbf{N}_a^T \mathbf{N}_s \mathbf{w} d\Gamma_{(i1)} = \delta \mathbf{p}^T \int \mathbf{N}_a^T \mathbf{N}_s \mathbf{w} d\Gamma_{(i1)} \quad (4.9)$$

Unter Verwendung der in (4.8) definierten Kopplungsmatrix ergibt sich damit

$$\delta \mathbf{p}^T \int \mathbf{N}_a^T \mathbf{N}_s d\Gamma_{(i1)} \mathbf{w} \implies \mathbf{d} = \mathbf{C}^T \mathbf{w}_{i1}^{(P1)} \quad (4.10)$$

Mit den Gleichungen (4.4) und (4.5) liegen gekoppelte Finite-Element Gleichungen für die Berechnung des Zusammenwirkens einer Kirchhoffplatte mit einem kompressiblen Fluid vor.

### FE/FE/FE-Kopplung einer Platte mit beidseitigem Fluidkontakt

Sind analog zu Abbildung 4.1 beide Seiten der Kirchhoffplatte von einem Fluidgebiet umgeben, so ist der Schalldruck vor der Platte von dem hinter der Platte verschieden. An der Koppelfläche springt also der Schalldruck, so daß dort die Verschiebungen  $w$  der Struktur am resultierenden Schalldruck Arbeit leisten. Für den Fall, daß die Normale der Platte  $\Omega_{P1}$  vom Innenraum  $\Omega_{IR1}$  in den Innenraum  $\Omega_{IR2}$  zeigt (s. Abb 4.3), leisten die Verschiebungen  $w$  der Struktur an der Differenz der Schalldrücke  $p^{(IR1)}$  vor und  $p^{(IR2)}$  hinter der Platte Arbeit:

$$\delta W = \int \delta(p^{(IR1)} - p^{(IR2)}) w d\Gamma_{(i1)} \quad (4.11)$$

$$\delta W = \int (p^{(IR1)} - p^{(IR2)}) \delta w d\Gamma_{(i1)} \quad (4.12)$$

Die FE-Gleichungen ergeben sich bei beidseitigem Fluidkontakt daher für die Fluide zu

$$\left( \mathbf{K}_1 - k^2 \mathbf{K}_2 \right) \mathbf{p}^{(IR1)} = +\rho \omega^2 \mathbf{C}^T \mathbf{w}_{i1}^{(P1)} \quad (4.13)$$

$$\left( \mathbf{K}_1 - k^2 \mathbf{K}_2 \right) \mathbf{p}^{(IR2)} = -\rho \omega^2 \mathbf{C}^T \mathbf{w}_{i1}^{(P1)} \quad (4.14)$$

und die Platte zu

$$\left( \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} \right)^* \mathbf{w}^{(P1)} = +\mathbf{C} \mathbf{p}_{i1}^{(IR1)} - \mathbf{C} \mathbf{p}_{i1}^{(IR2)}, \quad (4.15)$$

wobei im Vektor  $\mathbf{p}_{i1}^{(IR2)}$  die Schalldrücke an den Koppelknoten hinter der Platte, also die Schalldrücke an der Koppelfläche  $\Gamma_{i1}$  im zweiten Fluidgebiet  $\Omega_{IR2}$  zusammengefaßt sind. Der Vektor  $\mathbf{p}_{i1}^{(IR1)}$  enthält die Schalldrücke der Koppelknoten vor der Platte, d.h. an der Koppelfläche  $\Gamma_{i1}$  im ersten Fluidgebiet  $\Omega_{IR1}$ .

### 4.2.2 Kopplung von REM für ein kompressibles Fluid mit FEM der Kirchhoffplatte

Die Herleitung der FE/RE-Kopplungsbedingung für das Zusammenwirken einer Kirchhoffplatte mit einem kompressiblen Fluid unterscheidet sich vom Vorgehen im vorherigen Abschnitt. Die folgenden Ausführungen zur FE/RE-Kopplung erfolgen im Hinblick auf die vorliegende Problemstellung unter Berücksichtigung der Tatsache, daß ein Fenster in der Regel in die Gebäudefront eines Hauses eingebaut ist.

Wenn die unendlich ausgedehnte Luft in der Umgebung des Gebäudes wie beabsichtigt mit der Randelementmethode behandelt werden soll, so stellt eben diese Gebäudefront den Rand dieses Gebietes dar. Man kann die Front des Hauses als eine Art Schallschirm auffassen, so daß das Randelementgebiet einen Halbraum umfaßt (s. Abb. 4.4). Der Rand des Halbraumes

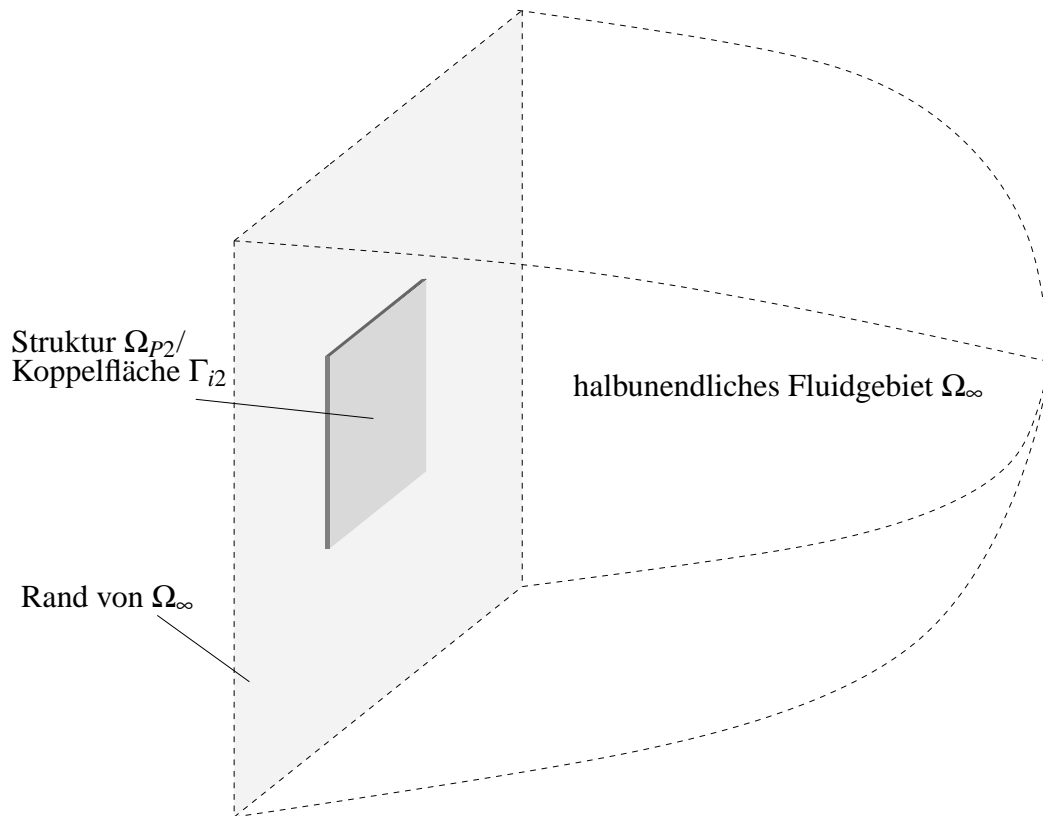


Abbildung 4.4: Kirchhoffplatte gekoppelt mit einem halbunendlichen Fluidgebiet

$\Omega_\infty$  besteht dann aus der Koppelfläche  $\Gamma_{i2}$  und einem zweiten Teil, der keinen direkten Kontakt mit der Platte  $\Omega_{P2}$  hat. Der letztere Teil des Randes muß wie üblich Dirichlet- oder Neumann-Randbedingungen aufweisen, damit das Problem lösbar ist (vgl. Abschnitt 2.3.1). In der Regel kann man davon ausgehen, daß die Gebäudefront schallhart ist. An der Koppelfläche hingegen werden das FE- und das Randelementgebiet zusammengeführt. Dort sind weder der Schalldruck noch der Schallfluß a priori bekannt.

### RE/FE-Kopplung einer Platte mit einseitigem Fluidkontakt

Für den Fall des einseitigen Fluidkontakts ergibt sich die Kopplung der Platte  $\Omega_{P2}$  mit dem Halbraum  $\Omega_\infty$  wie nachfolgend beschrieben. Dabei ist zu beachten, daß bei einer Kopplung mit der Randelementmethode nicht nur ein Zusammenhang zwischen dem Schalldruck im Fluid und den Verschiebungen hergestellt, sondern außerdem der Schallfluß gekoppelt werden muß.

Die Kopplungsbedingungen eines idealen Fluids und einer Struktur lauten für die gemeinsamen Ränder [4]:

- Die Normalkomponente der auf das elastische Gebiet wirkenden Randkraft und der hydrodynamische Druck des Fluids sind im Gleichgewicht.
- Die Normalkomponente der Beschleunigung jedes Flüssigkeitsteilchens stimme mit der des benachbarten Teilchens eines elastischen Mediums überein.

Die erste der beiden genannten Bedingungen wurde bei der FE/FE-Kopplung bereits implizit verwendet indem der hydrodynamische Druck des Fluids quasi als Last auf die Platte aufgebracht wurde. Die zweite Bedingung wird nun für die Kopplung des Schallflusses mit den Verschiebungen der Platte herangezogen. Es ergibt sich der folgende Zusammenhang:

$$\mathbf{q} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{n}} = \rho_F \omega^2 \mathbf{w} \quad (4.16)$$

Die erneute Anwendung des Prinzips der virtuellen Arbeit führt auf die Kopplung mit dem Schalldruck  $p$  im Randelementgebiet:

$$\delta W = - \int p \delta w d\Gamma_{(i2)} \quad (4.17)$$

Das daraus folgende System von algebraischen Gleichungen besteht aus den Finite-Element Gleichungen für die Platte

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})^* \mathbf{w}^{(P2)} = - \mathbf{C}_{(FE/RE)} \mathbf{p}_{i2}^{(\infty)} \quad (4.18)$$

und den Randelementgleichungen des Fluidgebietes:

$$\text{Kopplfläche:} \quad \rho_F \omega^2 \mathbf{G} \mathbf{w}_{i2}^{(P2)} - \mathbf{H} \mathbf{p}^{(\infty)} = \mathbf{0} \quad (4.19)$$

$$\text{übriger Rand:} \quad \mathbf{G} \mathbf{q}^{(\infty)} - \mathbf{H} \mathbf{p}^{(\infty)} = \mathbf{0}. \quad (4.20)$$

Die Kopplungsmatrix  $\mathbf{C}_{(FE/RE)}$  ergibt sich analog zur FE/FE-Kopplungsmatrix und ist abhängig von der Diskretisierung des Randelementgebietes und der Diskretisierung der Platte.

### RE/FE/FE-Kopplung einer Platte mit beidseitigem Fluidkontakt

Für den Fall, daß die Platte ein halbumendliches Gebiet  $\Omega_\infty$  von einem abgeschlossenen Innenraum  $\Omega_{IR}$  trennt (s. Abb. 4.5), müssen zur Kopplung erneut die Arbeitsanteile der Verschiebungen am Schalldrucksprung analog zu den Gleichungen (4.11) und (4.12) herangezogen werden.

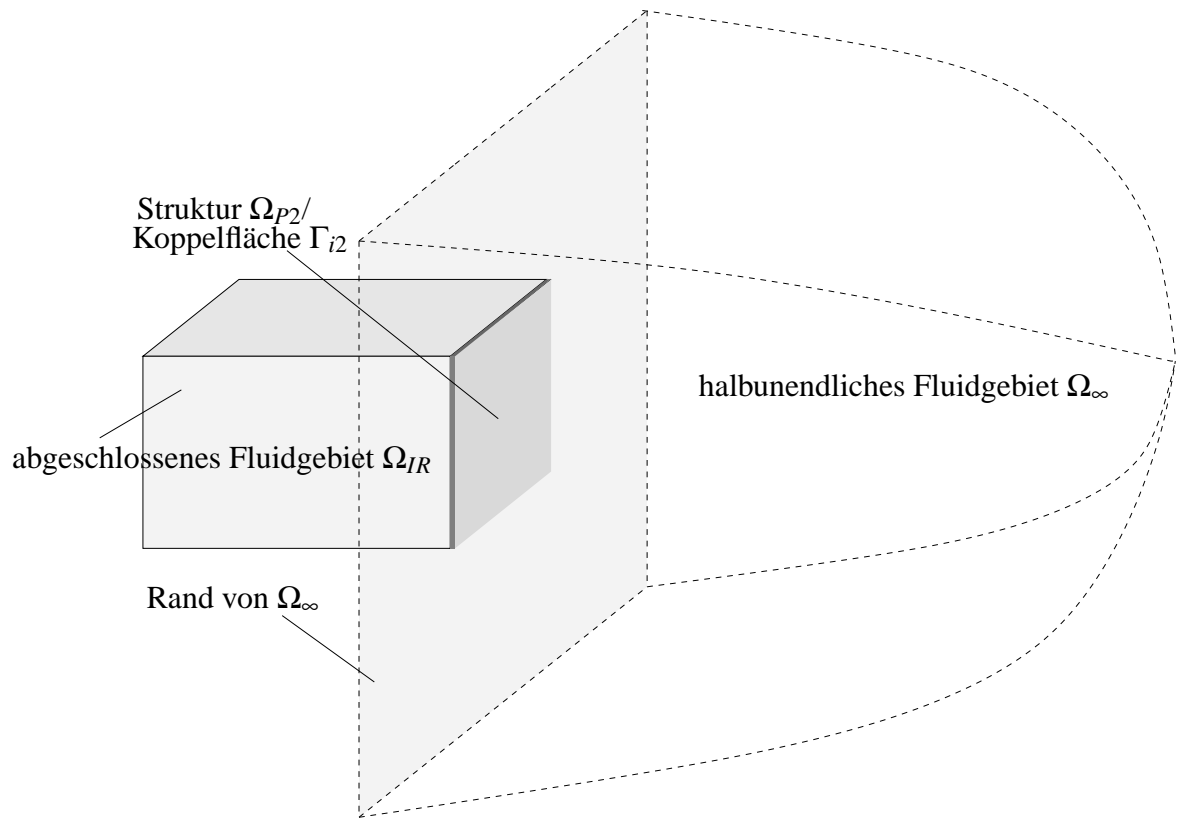


Abbildung 4.5: Kirchhoffplatte gekoppelt mit einem abgeschlossenen und einem halbunendlichen Fluidgebiet

Man erhält dann das folgende System von Gleichungen mit dem Finite-Element Teil für das abgeschlossene Fluidgebiet

$$(\mathbf{K}_1 - k^2 \mathbf{K}_2) \mathbf{p}^{(IR)} = + \rho \omega^2 \mathbf{C}_{(FE/RE)}^T \mathbf{w}_{i2}^{(P2)}, \quad (4.21)$$

dem Finite-Element Teil für die trennende Platte

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})^* \mathbf{w}^{(P2)} = + \mathbf{C}_{(FE/FE)} \mathbf{p}_{i2}^{(IR)} - \mathbf{C}_{(FE/RE)} \mathbf{p}_{i2}^{(\infty)} \quad (4.22)$$

und den Randelementgleichungen des Fluidgebietes:

$$\text{Koppelfläche:} \quad \rho_F \omega^2 \mathbf{G} \mathbf{w}_{i2}^{(P2)} - \mathbf{H} \mathbf{p}^{(\infty)} = \mathbf{0} \quad (4.23)$$

$$\text{übriger Rand:} \quad \mathbf{G} \mathbf{q}^{(\infty)} - \mathbf{H} \mathbf{p}^{(\infty)} = \mathbf{0}. \quad (4.24)$$

### 4.2.3 Gekoppeltes Berechnungsmodell aus Finite-Element und Randelementmethoden für doppelverglaste Fenster

Für die Berechnung eines doppelverglasten Isolierfensters, dessen Modell in Abbildung 4.2 dargestellt ist, müssen die Kopplungsstrategien zur Berücksichtigung von Zusammen- und Rückwirkung der einzelnen Bauteile kombiniert werden. Es ergibt sich bei einer Kopplung der FE/FE/FE-Methode und der FE/FE/RE-Methode das folgende System algebraischer Gleichungen:

- luftgefüllter Innenraum  $\Omega_S$ :

$$(\mathbf{K}_1 - k^2 \mathbf{K}_2) \mathbf{p}^{(IR)} = +\rho \omega^2 \mathbf{C}_{(FE/FE)}^T \mathbf{w}_{i1}^{(P1)} \quad (4.25)$$

- raumseitige Glasscheibe  $\Omega_{P1}$ :

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})^* \mathbf{w}^{(P1)} = +\mathbf{C}_{(FE/FE)} \mathbf{p}_{i1}^{(IR)} - \mathbf{C}_{(FE/FE)} \mathbf{p}_{i1}^{(SZR)} \quad (4.26)$$

- gasgefüllter SZR  $\Omega_{SZR}$ :

$$(\mathbf{K}_1 - k^2 \mathbf{K}_2) \mathbf{p}^{(SZR)} = -\rho \omega^2 \mathbf{C}_{(FE/FE)}^T \mathbf{w}_{i1}^{(P1)} + \rho \omega^2 \mathbf{C}_{(FE/RE)}^T \mathbf{w}_{i2}^{(P2)} \quad (4.27)$$

- äußere Glasscheibe  $\Omega_{P2}$ :

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})^* \mathbf{w}^{(P2)} = +\mathbf{C}_{(FE/FE)} \mathbf{p}_{i2}^{(SZR)} - \mathbf{C}_{(FE/RE)} \mathbf{p}_{i2}^{(\infty)} \quad (4.28)$$

- umgebende Luft  $\Omega_\infty$ :

- Koppelfläche:

$$\mathbf{0} = \rho_F \omega^2 \mathbf{G} \mathbf{w}_{i2}^{(P2)} - \mathbf{H} \mathbf{p}^{(\infty)} \quad (4.29)$$

- übriger Rand:

$$\mathbf{0} = \mathbf{G} \mathbf{q}^{(\infty)} - \mathbf{H} \mathbf{p}^{(\infty)} \quad (4.30)$$

Werden an der Koppelfläche gleiche Ansatzfunktionen für die Finiten Elemente und die Randelemente gewählt, so sind die Kopplungsmatrizen  $\mathbf{C}_{(FE/RE)}$  und  $\mathbf{C}_{(FE/FE)}$  gleich.



## 4.3 Verifikationsbeispiele

### 4.3.1 Schalldämmung einer einzelnen Platte - Vergleich von ungekoppelter und gekoppelter Berechnung

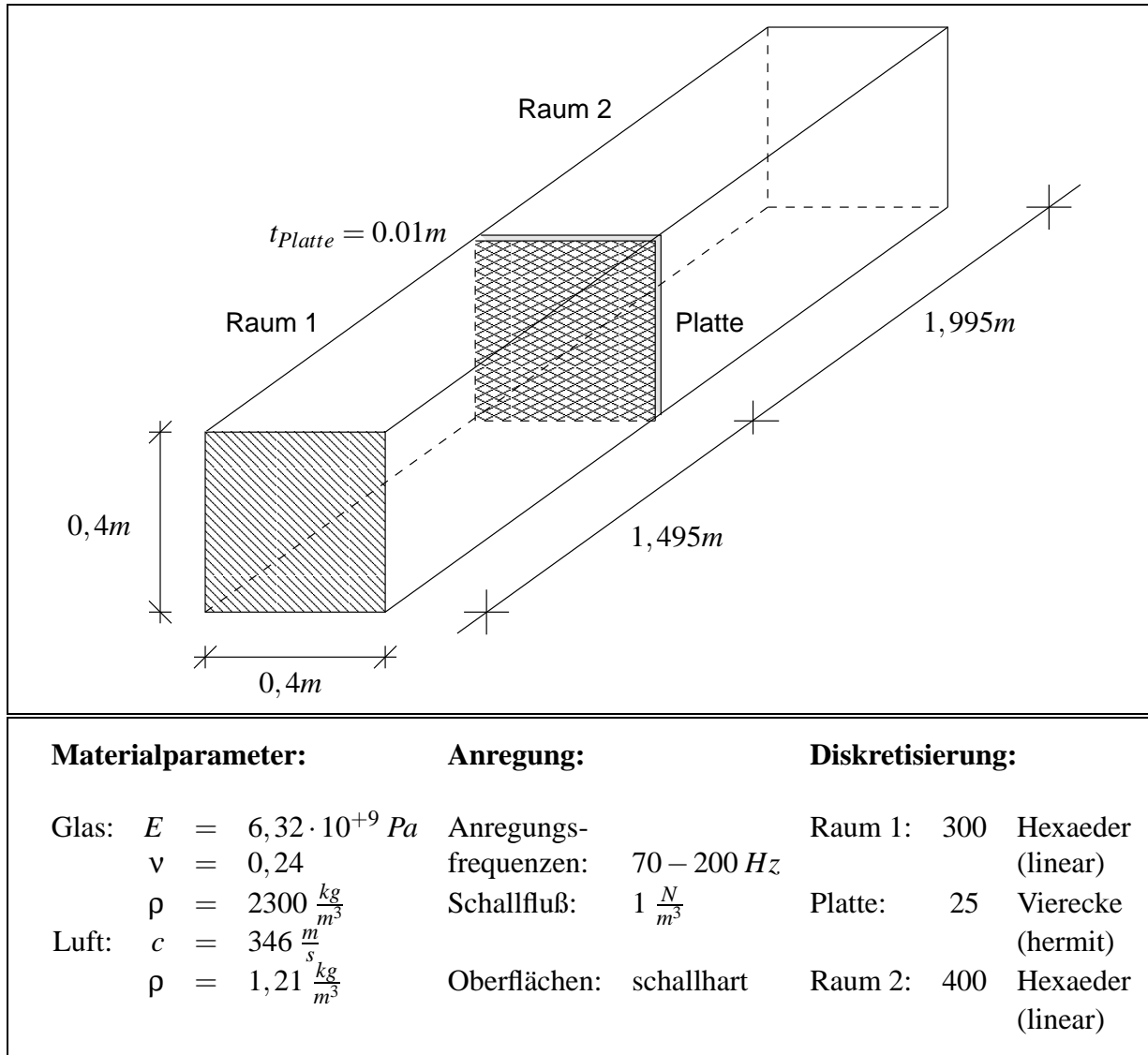
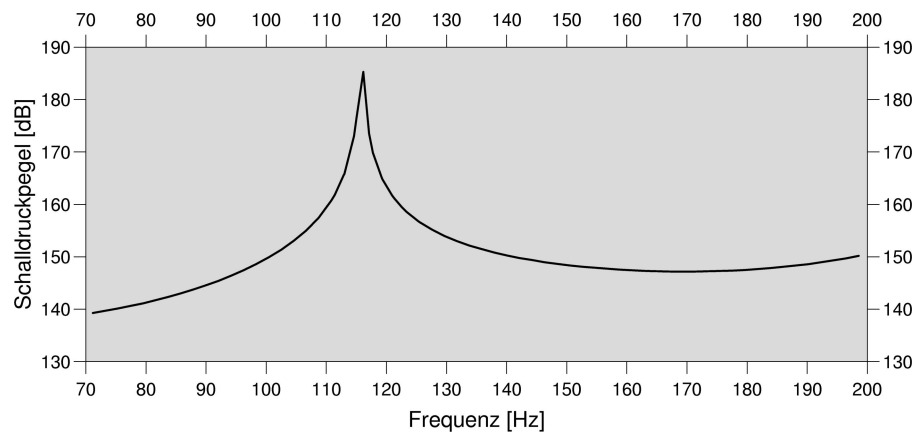
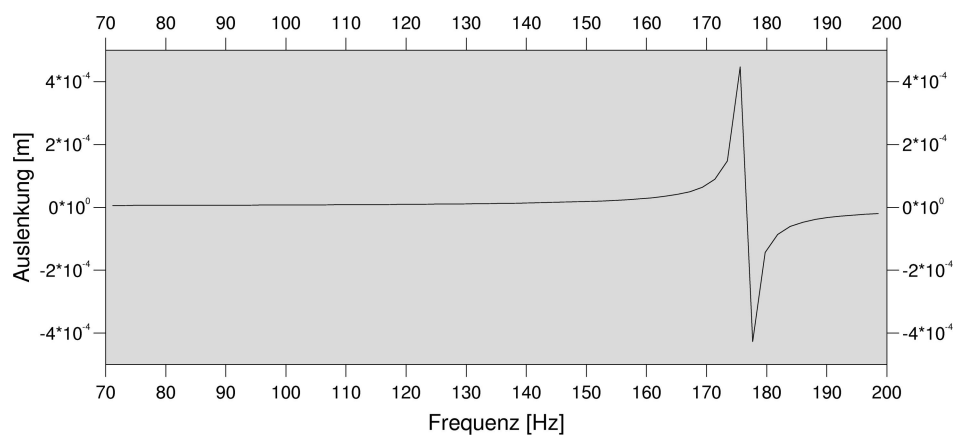


Abbildung 4.6: Systemdaten für die Schalldämmung einer einzelnen Platte

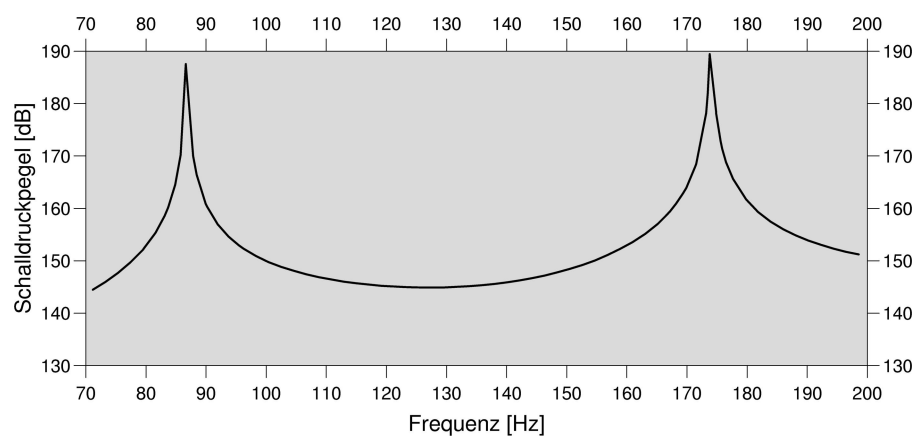
Zunächst werden die in den vorherigen Abschnitten vorgestellten Verfahren auf die folgende Testgeometrie angewendet: Eine Glasplatte der Dicke  $0,01\text{m}$  trennt zwei abgeschlossene, mit Luft gefüllte Rechteckräume der Größe  $0,4\text{m} \times 0,4\text{m} \times 1,495\text{m}$  bzw.  $0,4\text{m} \times 0,4\text{m} \times 1,995\text{m}$  voneinander. Die Anregung erfolgt durch einen Schallfluß von  $1 \frac{\text{N}}{\text{m}^3}$  an der äußeren Stirnfläche des kleineren Raumes, die anderen Oberflächen des Raumes werden als schallhart modelliert. Die Berechnung erfolgt für Anregungsfrequenzen zwischen  $70\text{Hz}$  und  $200\text{Hz}$ .



(a) Gemittelter Schalldruckpegel in Raum 1



(b) Verschiebung des Plattenmittelknotens



(c) Gemittelter Schalldruckpegel in Raum 2

Abbildung 4.7: Ungekoppelte Berechnung des Schallfeldes der einzelnen Systemteile

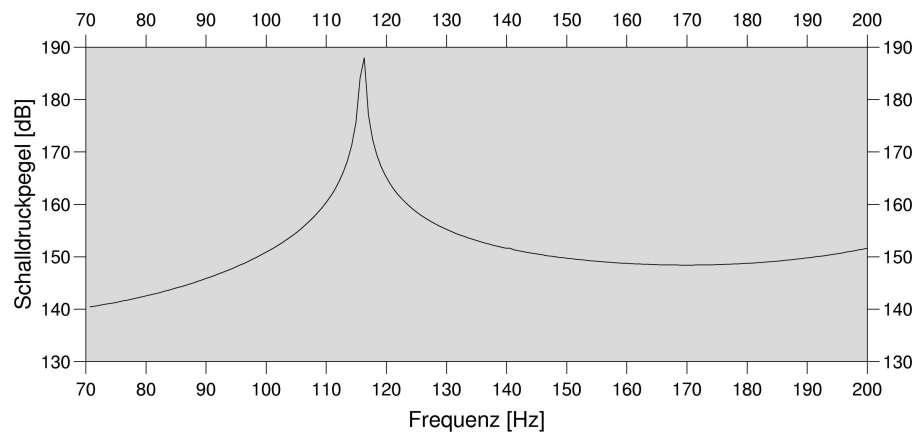
Die gewählte Geometrie eignet sich besonders als Testbeispiel, da die zu erwartenden ersten Resonanzfrequenzen der Rechteckräume sowie der Platte im untersuchten Frequenzbereich liegen und außerdem zur Lokalisierung weit genug auseinander liegen.

Zum Vergleich wurde für jeden der drei Systembereiche (Raum 1, Platte und Raum 2) *einzelne Referenzberechnung* durchgeführt. Die Anregung erfolgt bei den beiden luftgefüllten Quadern durch Quellen an jeweils einer Stirnfläche, bei der Platte durch eine konstante Schalldruckbelastung. Die Ergebnisse der drei Berechnungen sind in den Abbildungen 4.7 (a), (b) und (c) dargestellt. Deutlich sind Peaks für ausgewiesene Frequenzen, an denen der Schalldruckpegel in den Räumen bzw. die Auslenkung der Platte sehr groß werden. Diese Frequenzen können mit Hilfe von Gleichung (2.48) bzw. (2.101) den Eigenschwingungen der eingespannten Rechteckplatte (172, 1Hz) bzw. des quaderförmigen ersten (115, 7Hz) bzw. zweiten (86, 7Hz und 173, 4Hz) Raumes zugeordnet werden.

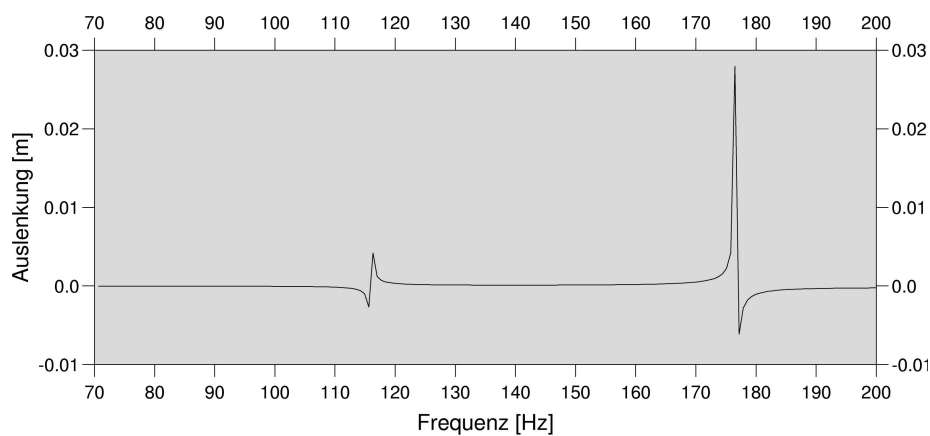
Die beiden beschriebenen Räume und die sie trennende Platte werden nun nach Abbildung 4.6 so zu einem System zusammengeführt, daß sie sich wechselseitig beeinflussen können. Die dadurch resultierenden Schalldruckpegel in den Räumen bzw. Auslenkungen der Trennplatte werden durch die beiden in diesem Kapitel beschriebenen Methoden ermittelt: Zum einen durch eine gekoppelte Berechnung ohne Einbeziehung von Rückwirkungseffekten, zum zweiten durch eine vollständig gekoppelte Berechnung mit Erfassung der Interaktionen.

Die *gekoppelte Berechnung ohne Einbeziehung der Rückwirkung* erfolgt nach Abschnitt 4.1 in drei Schritten, wobei jeweils die Lösung in einem Systemteil als Belastung auf den nächsten Systemabschnitt aufgebracht wird. Die Ergebnisse dieser Berechnung in Abbildung 4.8 (a) bzw. (c) zeigen den gemittelten Schalldruckpegel im ersten bzw. zweiten Raum und die Auslenkungen in der Plattenmitte in Abb. 4.8 (b). In der Schallpegelkurve des ersten Raumes tritt bei ungefähr 115, 7Hz ein Peak auf, also bei der ersten Resonanzfrequenz des Rechteckquaders. An dieser Frequenz ist auch in der Auslenkung der Platte ein Resonanzpeak zu erkennen. Die Eigenschaften des ersten Raumes beeinflussen demnach die Schwingungen der Platte. Zusätzlich ist deutlich die strukturelle Eigenfrequenz bei ungefähr 172, 1Hz zu erkennen. Der Schalldruckpegel aus dem dritten Berechnungsschritt zeigt Peaks für beide vorher genannten Frequenzen. Daneben zeigen sich die Resonanzpeaks an den ersten beiden Eigenfrequenzen des zweiten Rechteckraumes bei ungefähr 86, 7Hz und 173, 4Hz. Die Ergebnisse in Abbildung 4.8 zeigen deutlich, daß mit der gekoppelten Berechnung in mehreren Schritten zwar die Wirkung eines Bauteils auf das nächste Bauteil berücksichtigt werden kann, allerdings werden durch diese Methode keinerlei Rückwirkungseffekte erfaßt. In der Kurve des Schalldruckpegels für den ersten Raum wirken sich z.B. die Resonanzen der Platte und des zweiten Raumes nicht aus. Im Verlauf des Schalldruckpegels des zweiten Raumes hingegen sind die Resonanzpeaks der vorab berechneten Bauteile deutlich zu erkennen.

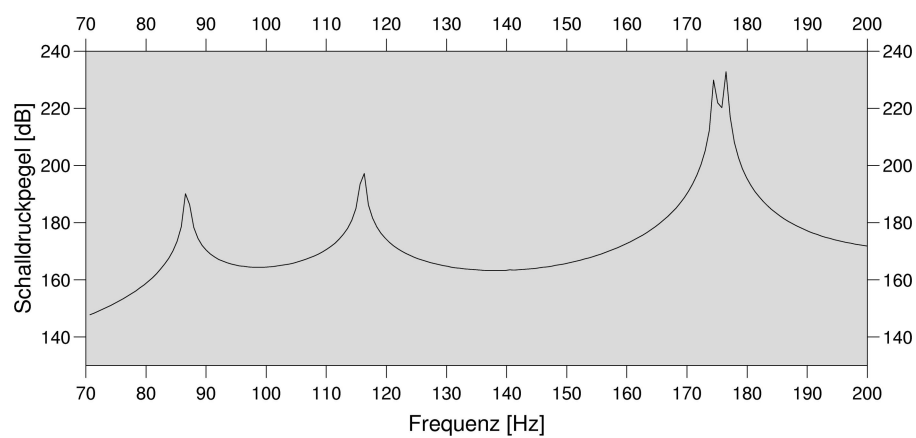
Ein Vergleich dieser Ergebnisse mit einer *vollständig gekoppelten Berechnung* ist in Abbildung 4.9 dargestellt. Die Schallpegelkurven des vollständig gekoppelten Beispiels (Abb. 4.9 (b)) weisen nicht wie die Berechnung ohne Berücksichtigung der Rückwirkungen (Abb. 4.9 (a)) nur für den zweiten Raum alle in dem betrachteten Frequenzbereich zu erwartenden Resonanzpeaks auf, sondern auch für den ersten Raum, daß heißt im ersten Systemabschnitt. Das Niveau der Schalldruckpegel für beide Berechnungsmethoden ist zwar im Prinzip gleich, allerdings kommt es insbesondere in der Nähe der Resonanzen der Platte und des zweiten Raumes



(a) Gemittelter Schalldruckpegel in Raum 1

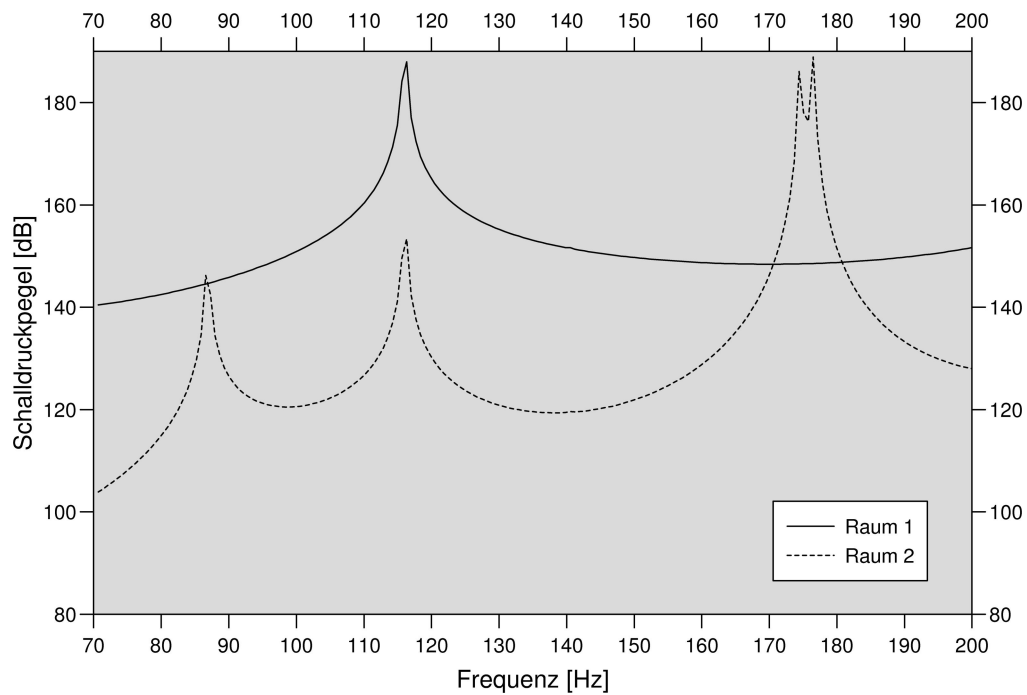


(b) Verschiebung des Plattenmittelknotens

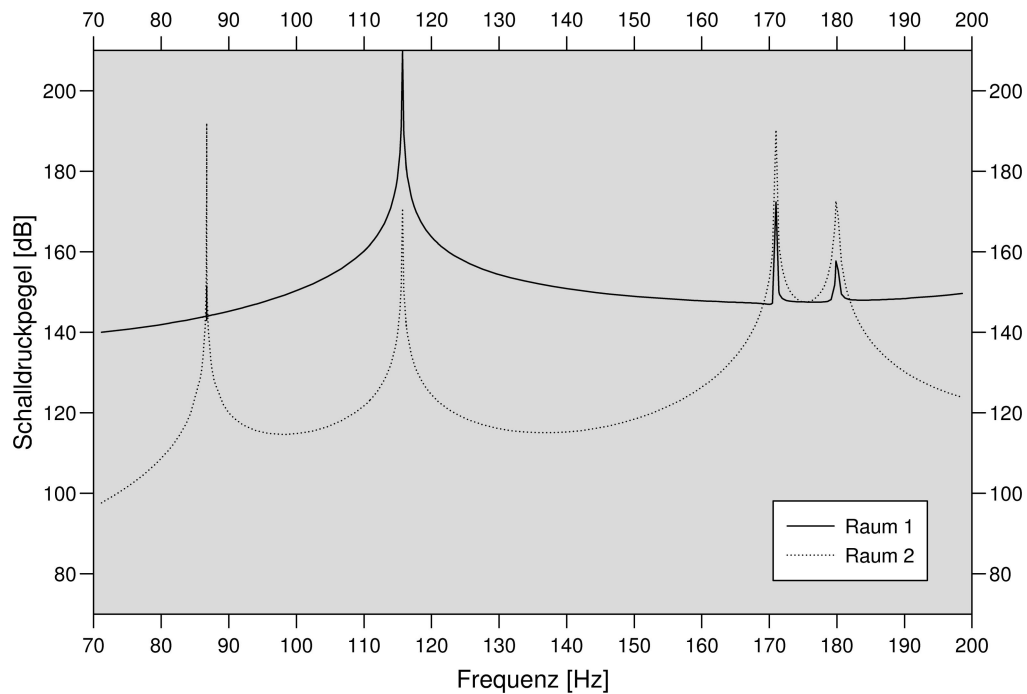


(c) Gemittelter Schalldruckpegel in Raum 2

Abbildung 4.8: Gekoppelte Berechnung des Schallfeldes der einzelnen Systemteile ohne Berücksichtigung der Rückwirkungen



(a) Gekoppelte Berechnung ohne Berücksichtigung der Rückwirkungen in drei Schritten



(b) Vollständig gekoppelte Berechnung unter Berücksichtigung der Rückwirkungen

Abbildung 4.9: Gemittelter Schalldruckpegel vor und hinter der Platte - Vergleich von Berechnungen ohne und mit Berücksichtigung der Rückwirkungen

bei einer Berechnung ohne Berücksichtigung der Rückwirkungen zu starken Abweichungen.

Dies belegt, daß die komplexen Interaktionen zwischen Struktur und Fluid nur erfaßt werden können, wenn eine gekoppelte Berechnung durchgeführt wird, bei der durch die Kopplungsbedingungen die Rückwirkungseffekte komplett abgebildet werden, wie es bei einer Kopplung mittels des Arbeitsprinzips der Fall ist.

### 4.3.2 Schalldämmung von zwei Platten

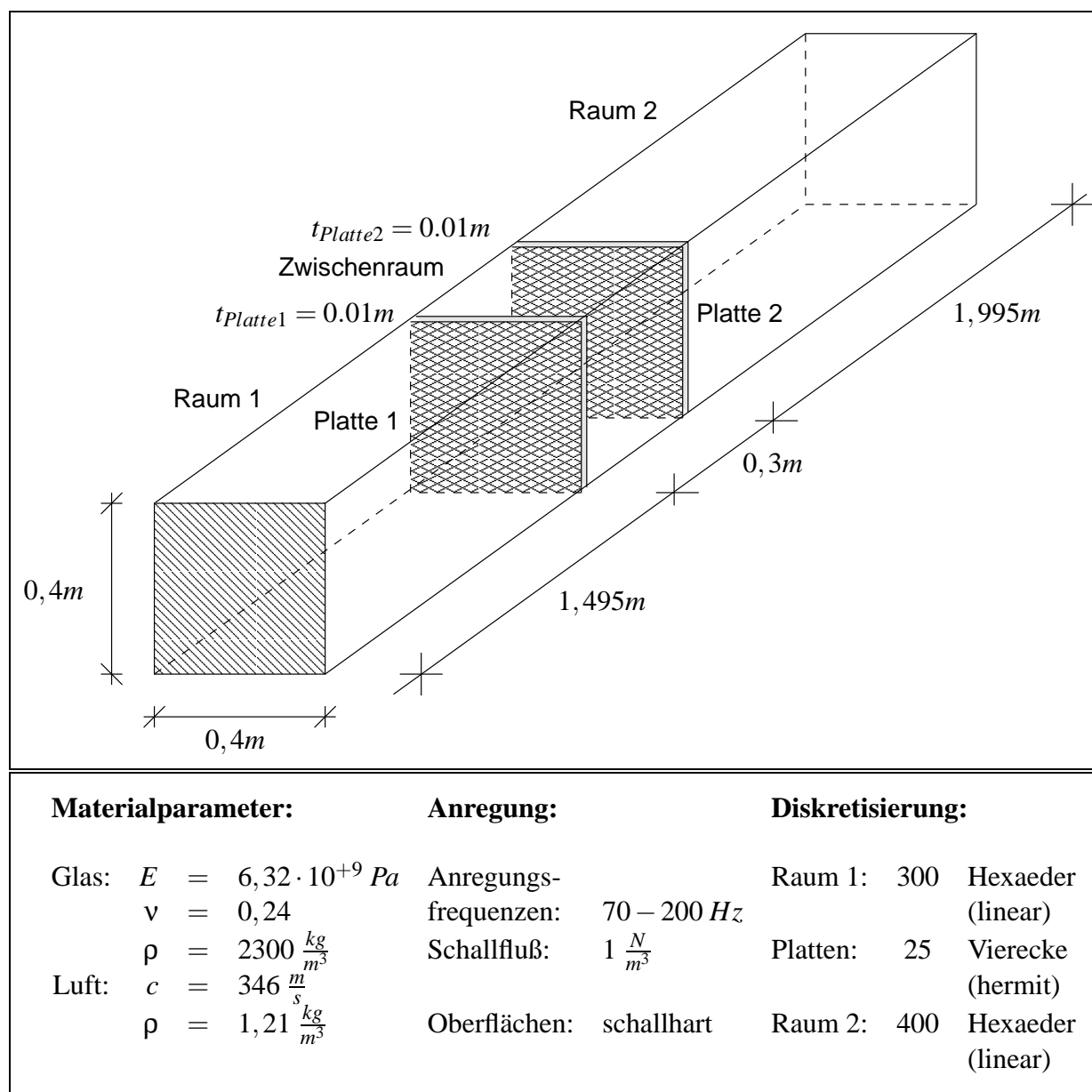


Abbildung 4.10: Systemdaten für die Schalldämmung zweier Platten

Das vorhergehende Beispiel hat gezeigt, daß zwischen einem Trennbauteil und der es umgebenden Luft Rück- und Wechselwirkungseffekte von Bedeutung sind. Wenn das Trennbauteil aus zwei Schalen mit einem luftgefüllten Hohlraum besteht, so treten zusätzlich Interaktionen zwischen den einzelnen Schalen, dem Hohlraum und den Räumen auf. Diese sollen an einer vollständig gekoppelten Berechnung der Schalldämmung von zwei Platten (vgl. Abb. 4.10) verdeutlicht werden. Die Geometrie und die Materialien werden entsprechend dem letzten Beispiel gewählt, wobei die Einzelplatte durch zwei Platten gleicher Dicke ersetzt wurde, die durch einen luftgefüllten Hohlraum mit einer Breite von 0,3m verbunden sind.

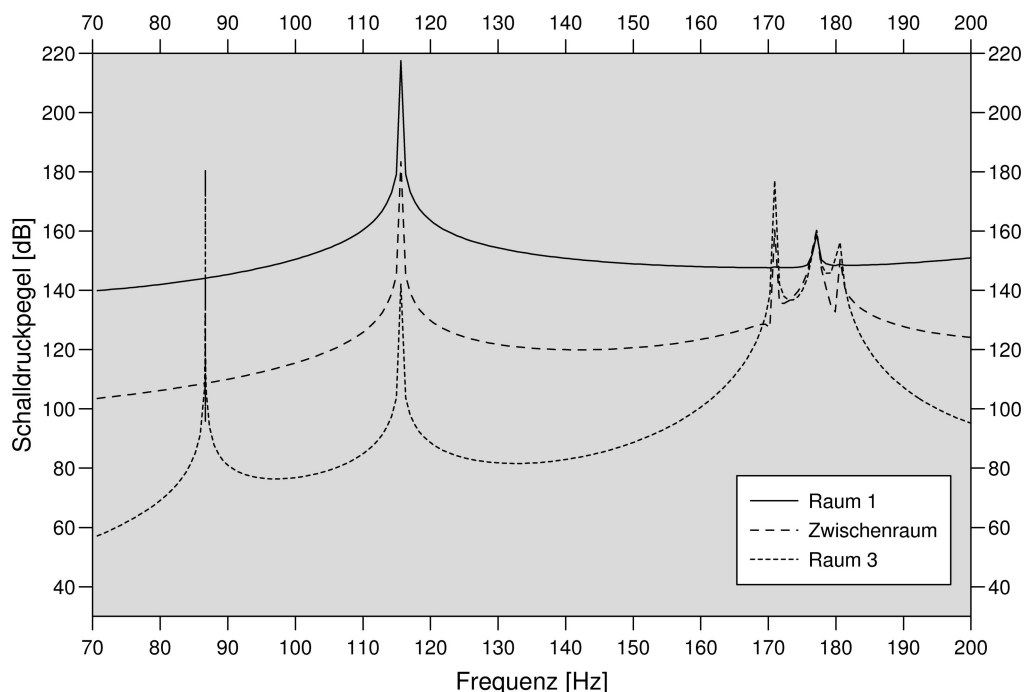


Abbildung 4.11: Gemittelter Schalldruckpegel vor und hinter dem zweischaligen Trennbauteil

Die Ergebnisse einer vollständig gekoppelten Berechnung sind in Abbildung 4.11 dargestellt. Die Frequenzkurve für den gemittelten Schalldruckpegel im ersten Raum weicht nur geringfügig von der entsprechenden Kurve bei einer einzelnen Platte ab (vgl. Abb. 4.9(b)). Hinter dem Trennbauteil (bestehend aus zwei Platten und einem luftgefüllten Zwischenraum), also in Raum 2, ist der Schalldruckpegel im Vergleich zum Beispiel mit einer einzelnen Trennplatte wesentlich geringer. Dies läßt sich mit der verbesserten Schalldämmwirkung von zweischaligen gegenüber einschaligen Bauteilen erklären, die im folgenden Kapitel ausführlich diskutiert wird. Das Niveau der Schallpegelkurve im Hohlraum entspricht ungefähr den Ergebnissen für ein einschaliges Trennbauteil.

Die Berechnung zeigt neben der guten Schalldämmung eine weitere markante Eigenschaft eines zweischaligen Bauteils: Im Verlauf der Schallpegelkurven ist in der Nähe der strukturellen Eigenfrequenz ein sogenannter Doppelpack zu erkennen, wie er typisch für ein System aus „Platte-Hohlraum-Platte“ ist. Solche zweischaligen Bauteile werden im Hochbau häufig verwendet, so daß ihr Verhalten bezüglich Schalltransmission in Abschnitt 5.3.2 noch eingehend

diskutiert wird. Hier sei lediglich angemerkt, daß die Doppelpeaks bei zweischaligen Bauteilen auftreten, weil in der Nähe der Platteneigenfrequenzen die Resonanzfrequenzen des gekoppelten System aus Platten und luftgefülltem Hohlraum liegen [52].

Durch die vollständig gekoppelte Berechnung wirken sich die Resonanzpeaks jedes Systemteils auch auf die Schalldruckpegel an den ausgewiesenen Frequenzen jedes anderen Systemabschnitts aus. Dabei ist die Wirkung der Eigenfrequenz des Raumes, in dem sich die Schallquellen befinden, auf die anderen Systemteile am größten.

### 4.3.3 Schalldämmung einer einzelnen Platte - Vergleich von gekoppelter FE/FE/FE- und gekoppelter FE/FE/RE-Berechnung

In diesem Abschnitt soll das Schalldämmverhalten einer Platte, die zwei abgeschlossene Räume voneinander trennt, dem Verhalten einer Platte gegenübergestellt werden, die einen abgeschlossenen Raum von der unendlich ausgedehnten Umgebung trennt. Beide Probleme werden mit dem vollständig gekoppelten Berechnungsverfahren gelöst, um die Interaktionen zwischen Struktur und Fluid erfassen zu können.

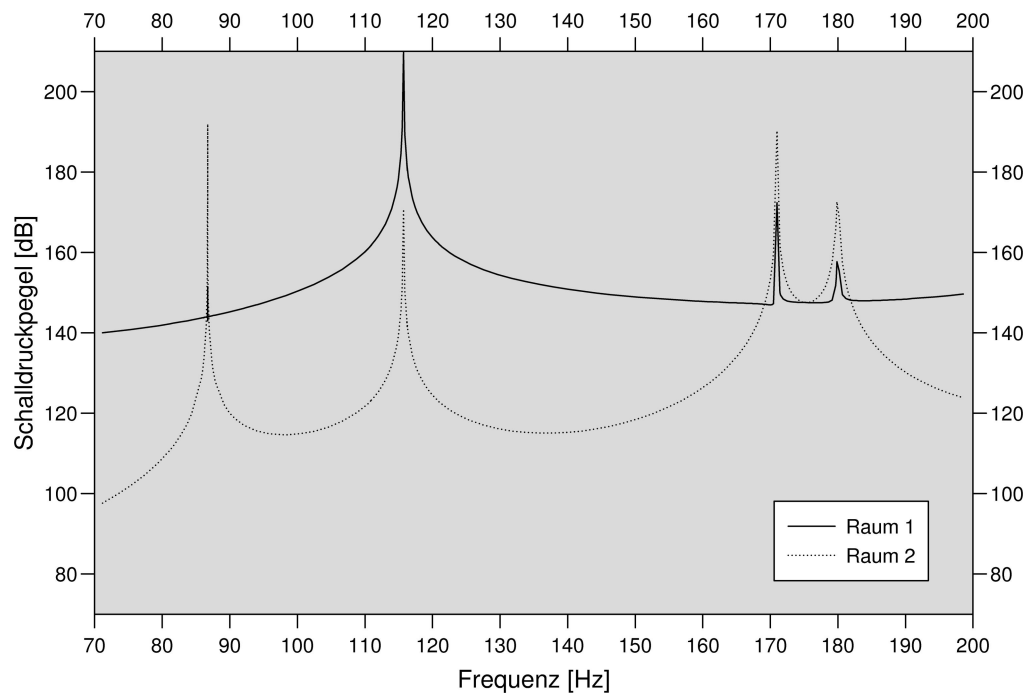
Die beiden Testgeometrien repräsentieren zwei unterschiedliche Problemklassen. Bei der ersten Geometrie handelt es sich um ein reines Innenraumproblem, so daß aus den in Abschnitt 4.2 erläuterten Gründen die Berechnungsmethode herangezogen wird, die sowohl für die dynamische Beschreibung der Struktur, als auch für die Berechnung des Schallfeldes in den luftgefüllten Räumen die Finite-Element-Methode verwendet. Bei der zweiten Testgeometrie wird ein Innenraum über die Platte mit einem Halbraum - der Umgebung - verbunden, so daß eine Kopplung aus Finiten Elementen und Randelementen die geeignete Methode ist.

Die Systemdaten für die FE/FE/FE-Berechnung sind Abbildung 4.6 zu entnehmen. Für die FE/FE/RE-Berechnung wurde auf die Finite-Element-Diskretisierung des zweiten Raumes verzichtet und dieser durch das halbumendliche Gebiet ersetzt. Die Größe des Randelementrandes beträgt  $1,4m \times 1,4m$ .

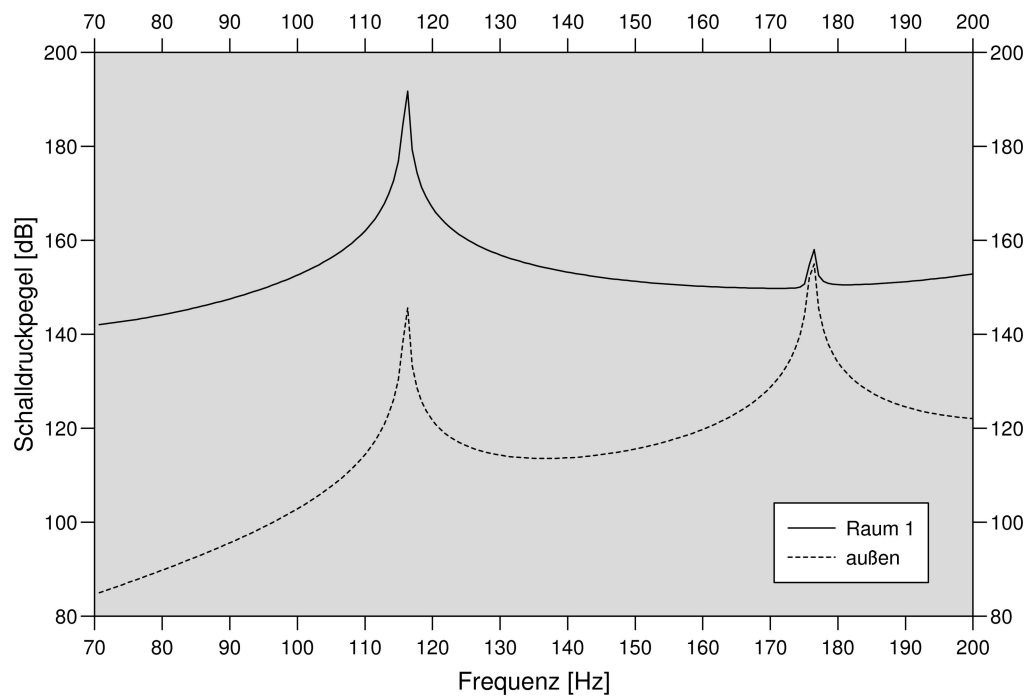
Die Ergebnisse der beiden vollständig gekoppelten Berechnungen sind in Abbildung 4.12 dargestellt. Die Ergebnisse der FE/FE/FE-Berechnung für das reine Innenraumproblem (Abb. 4.12(a)) entsprechen den Berechnungen in Abschnitt 4.3.1 und sind hier zur Gegenüberstellung mit der FE/FE/RE-Berechnung von Raum/Platte/Halbraum (Abb. 4.12(b)) nochmals dargestellt. Auffällig ist dabei, daß die Resonanzpeaks des zweiten Raumes bei der zweiten Berechnung nicht auftreten, wie dies auch aufgrund der modifizierten Geometrie zu erwarten ist.

Daneben zeigt sich für die Berechnung mit einem Halbraum im Vergleich zum reinen Innenraumproblem ein Unterschied in den Schallpegelniveaus: Während der Verlauf des Schalldruckpegels im untersuchten Frequenzbereich für den ersten Raum für beide Berechnungen gut übereinstimmt, so ist der Schalldruckpegel außen vor der Trennplatte niedriger als im zweiten Raum des reinen Innenraumproblems. Dies begründet sich durch die grundsätzlich verschiedenen untersuchten Problemklassen: Im abgeschlossenen zweiten Raum wird der Schall an den Wänden vielfach reflektiert, so daß ein *Diffusfeld* entsteht. Im Gegensatz dazu ist der Halbraum nicht berandet, so daß die Wellen auslaufen können und man von einem *Freien Feld* sprechen kann, bei dem der Schalldruckpegel geringer sein muß.





(a) Vollständig gekoppelte FE/FE/FE-Berechnung (Raum/Platte/Raum)



(b) Vollständig gekoppelte FE/FE/RE-Berechnung (Raum/Platte/Halbraum)

Abbildung 4.12: Gemittelter Schalldruckpegel vor und hinter der Platte - Vergleich von FE/FE/FE- und FE/FE/RE-Berechnung

## 5 Schalldämmung von Fenstern

Die Belastung des Menschen durch unerwünschten Schall, also Lärm, gehört bekanntlich zu den gravierenden negativen Umwelteinflüssen. Umfragen haben in diesem Zusammenhang ergeben, daß die Bevölkerung sich durch Straßenverkehrslärm am stärksten beeinträchtigt sieht: 66% der Menschen in den alten und 79% der Menschen in den neuen Bundesländern fühlen sich durch solchen Lärm belästigt. Weiterhin wird die Lärmbelästigung durch Flug- und Schienenverkehrslärm als sehr stark empfunden. Außerdem fühlt sich immerhin ungefähr ein Fünftel der deutschen Bevölkerung durch Industrielärm oder durch laute Nachbarn gestört [103].

Zur Verbesserung dieser Situation vor allem bezüglich des Verkehrslärms sind Maßnahmen zur Verringerung sowohl der Geräuschemissionen als auch der -immissionen notwendig. Auf dem Gebiet der Verringerung der Schallabstrahlung von Fahrzeugen wurden dabei in der Vergangenheit bereits Erfolge erzielt, wie zum Beispiel durch die Entwicklung „leiser“ Motoren (s. z.B. [93]), die Verringerung von Abrollgeräuschen von Reifenfahrzeugen durch entsprechende Gestaltung der Reifen [89] und der Fahrbahndecken [99] oder durch die gedämpfte Bettung von Schienen [100]. Da die Auswirkungen insbesondere in Ballungszentren nicht ausreichend sind, sind außerdem schallabschirmende Maßnahmen notwendig. Allerdings ist die Möglichkeit Schallschutzmaßnahmen in Form von Mauern bzw. Wällen zu erstellen aufgrund örtlicher Gegebenheiten oft beschränkt. Durch neue Straßenführungen kommen häufig neue Orte der Schallentstehung hinzu und eine weitere Verdichtung der Bebauung zerstört die unversiegelten Flächen mit schallschluckenden Oberflächen. Daher muß zukünftig zum Schutz der Bewohner ein Hauptaugenmerk auf der Verbesserung der Schalldämmung von Gebäuden liegen.

Die Übertragung von Schall über die massiven Außenwände von Häusern hat einen sehr kleinen Anteil verglichen mit der Schalltransmission durch Fenster und Verglasungen. Die Bemühungen um eine Erhöhung der Schalldämmung muß sich deshalb insbesondere auf diese schwächsten Glieder der Außenhaut des Gebäudes konzentrieren. Der Entwurf von Fenstern darf sich also nicht nur nach den primären Anforderungen wie Tageslichtnutzung und Lüftung richten, sondern muß heute auch auf die Erfüllung zusätzlicher Nutzungsfaktoren wie dem Lärmschutz zielen.

### 5.1 Kennzeichnung des Schallschutzes im Hochbau

Wichtigste Kenngröße für den Schallschutz ist das Schalldämm-Maß von Bauteilen. Diese Bauteilkenngröße ist Maß für den Widerstand, den ein trennendes Bauteil gegenüber der Schalltransmission aufbringt. Es läßt sich – falls keine absorbierenden Flächen vorhanden sind – als

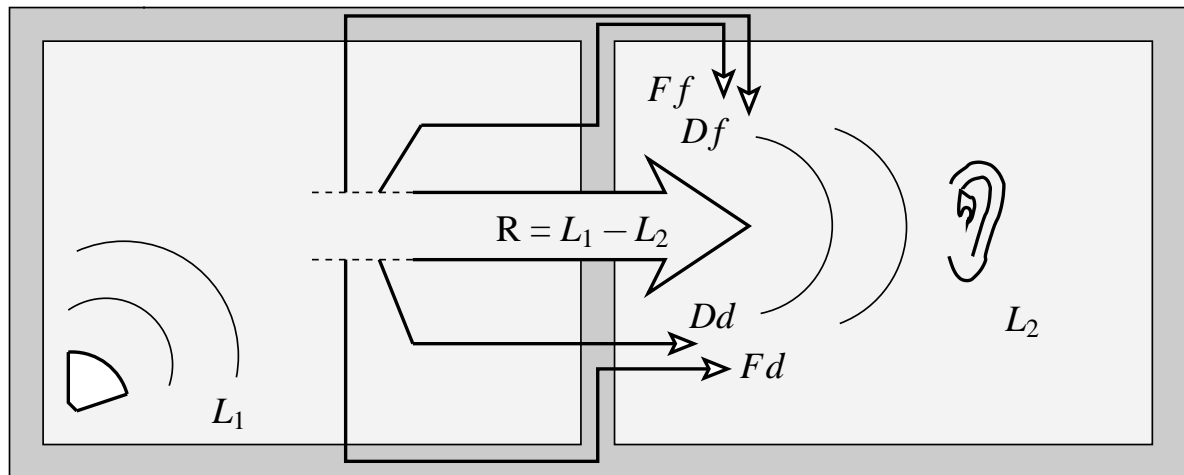


Abbildung 5.1: Schalldämm-Maß eines Trennbauteils - Nebenwege der Schallausbreitung durch flankierende Bauteile

Differenz der Schalldruckpegel am Ort der Schallentstehung  $L_1$  und am Empfangsort  $L_2$  bestimmen, wobei der Schalldruckpegel wie folgt definiert ist

$$L = 20 \lg \frac{\tilde{p}}{p_0} \quad [dB], \quad (5.1)$$

und mit  $\tilde{p}$  der Effektivwert des Schalldrucks und mit  $p_0$  der Bezugsschalldruck bezeichnet wird, der eine Größe von  $20 \frac{\mu N}{m^2}$  hat und den Schalldruck an der Hörschwelle des Menschen angibt.

Zwar ist der Pegel als Logarithmus einer Verhältnissgröße dimensionslos, jedoch fügt man zur Kennzeichnung der Logarithmierung dem Zahlenwert des Logarithmus die Bezeichnung Dezibel  $[dB]$  bei und verwendet sie wie eine Einheit.

Mit der Definition des Schalldruckpegels ergibt sich das Schalldämm-Maß zu

$$R = L_1 - L_2 = 20 \lg \frac{\tilde{p}_1}{\tilde{p}_2} \quad [dB]. \quad (5.2)$$

Für das Schalldämm-Maß eines Trennbauteils zweier benachbarter Räume nach Abbildung 5.1 ist als Schallpegel am Sende- und am Empfangsort der mittlere Schalldruckpegel in den beiden Räumen maßgebend. Der mittlere Schalldruckpegel läßt sich für eine diskrete Anzahl  $n$  von Schalldrücken - wie sie bei der experimentellen bauakustischen Prüfung für jeden Meßpunkt und bei der numerischen Simulation für jeden Knoten vorliegen - durch

$$L = 10 \lg \frac{\tilde{p}_1^2 + \tilde{p}_2^2 + \dots + \tilde{p}_n^2}{n \cdot p_0^2} \quad [dB] \quad (5.3)$$

ermitteln.

Die Schalldämmung eines Trennbauteils ist frequenzabhängig. Der bauakustisch relevante Bereich umfaßt ein Frequenzspektrum von 100 bis 3200 Hz (vgl. Abb. 5.2). Trägt man das

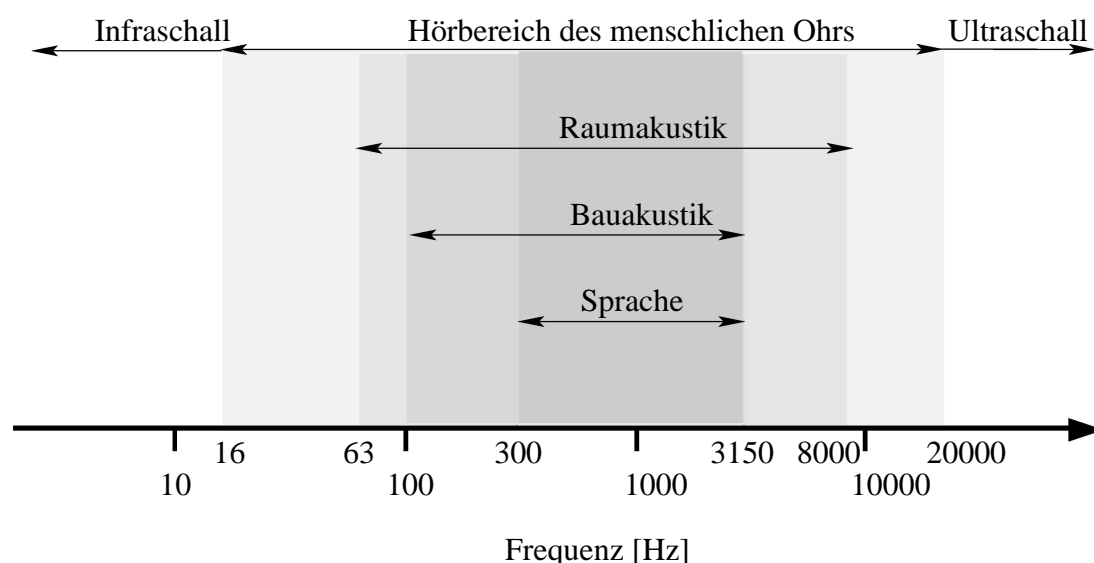


Abbildung 5.2: Frequenzen hörbarer und nichthörbarer Schallbereiche [58]

Schalldämm-Maß über die Anregungsfrequenz ab, so erhält man die sogenannte Schalldämmkurve. Um eine Bauteilkenngröße zu erhalten, die den gesamten bauakustischen Frequenzbereich abdeckt, kann der arithmetische Mittelwert der Schalldämm-Maße gebildet werden. Man spricht dann von einer Einzahlangabe. Bei der experimentellen Ermittlung des Schallpegels muß die Meßapparatur einen Terzfiltersatz nach DIN EN ISO 140 enthalten, so daß an 16 sogenannten Mittenfrequenzen der Schallpegel ermittelt wird. Durch diese Terzfilter werden die Schalldämmwerte bei 100, 125, 160, 200, 250, 315, 400, 500, 630, 800, 1250, 1600, 2000, 2500, 3150, 4000 und 5000 Hz bestimmt [35]. Entsprechend der experimentellen Ermittlung bietet sich auch bei Berechnung der Schalldämmkurve an, die Schallpegel in diesen Terzfrequenzen arithmetisch zu mitteln.

Bei der Verwendung eines gemittelten Schalldämm-Maßes ist zu beachten, daß dieser Wert objektiv ist und die frequenzabhängige Empfindlichkeit des Ohres unberücksichtigt läßt. Ein genaueres Ergebnis wird erzielt, wenn man die Anteile für unterschiedliche Frequenzen wichtet, um diese Eigenschaft des Gehörs zu berücksichtigen. Dazu nimmt man eine Bewertung der Schallpegel auf bestimmten Bezugskurven vor. Jedoch kann auch bei der Verwendung von bewerteten Schalldämm-Maßen keine genaue Aussage über das wirkliche Lautheitsempfinden gemacht werden, da zum einen die Bewertungskurven jeweils nur für bestimmte Pegelgrößen gültig sind und außerdem keine Verdeckungseffekte berücksichtigt werden können. Will man die psycho-akustischen Effekte möglichst exakt behandeln, so steht das Zwicker-Verfahren zur Verfügung, das von Frequenzpegelgruppen ausgeht [110].

Zudem ist eine Angabe notwendig, ob das Schalldämm-Maß tatsächlich nur das trennende Bauteil charakterisiert, also ob der Schallpegel am Empfangsort nur von dem direkt auf das Trennbauteil auftreffenden Schall herrührt und der Schall nur direkt von diesem in den Empfangsraum abgestrahlt wird (vgl. *Dd* Abb. 5.1), oder ob das Schalldämm-Maß die mögli-

chen Nebenwege der Schallausbreitung berücksichtigt. Trennt nämlich ein Bauteil zwei Räume gemäß Abb. 5.1 voneinander, so ist auch Schallübertragung durch die flankierenden Bauteile möglich. Neben dem direkt aufgenommenen und direkt weitergegebenen Schall  $Dd$  wird das Schallfeld im Empfangsraum außerdem verursacht durch direkt durch das Trennbauteil aufgenommenen aber vom flankierenden Teil abgestrahlten Anteilen  $Df$ , und von Anteilen, bei denen der Schall durch die flankierenden Bauteile aufgenommen und durch das flankierende  $Ff$  oder direkt durch das trennende Bauteil  $Fd$  abgegeben wird [35]. Das Schalldämm-Maß bei Berücksichtigung der Nebenwege wird als Bauschalldämmmaß  $R'$  bezeichnet.

## 5.2 Erforderliche Schalldämmung von Fenstern

Im Rahmen der allgemeinen bauphysikalischen Bestimmungen ist unter anderem der Nachweis zum Schutz gegen Außenlärm zu erbringen. Das vorhandene Schalldämm-Maß  $R'$  des Außenbauteils muß größer als das erforderliche Schalldämm-Maß  $R'_{w,res}$  sein.

$$R' \geq erf. R'_{w,res} \quad (5.4)$$

Nach der DIN 4109 - Schallschutz im Hochbau - sind die Anforderungen an die Luftschalldämmung von Außenbauteilen abhängig von der Nutzungsart der Gebäude und dem „maßgeblichen Außenlärmpegel“ (vgl. Tabelle 8, Abschnitt 5, DIN 4109 [30]). Für Verkehrslärm steht häufig durch Bebauungspläne oder Lärmkarten der maßgebende Lärmpegelbereich des Objektes fest, so daß der Außenlärmpegel nicht explizit ermittelt werden muß. Ist dies nicht der Fall, so erfolgt die Festlegung mit Hilfe des Nomogramms des Abschnitts 5 in der DIN 4109 [30].

Das vorhandene Schalldämm-Maß einer Fassade wird beeinflusst durch die Kenngrößen der einzelnen Bauteile. Für den Nachweis einer Außenwand mit Fenstern ist daher die Berechnung des vorhandenen, resultierenden Schalldämm-Maßes  $R'_{w,res}$  durch

$$R'_{w,res} = -\lg \frac{1}{S_g} \left( \sum_{i=1}^n S_i \cdot 10^{-\frac{R_{w,i}}{10}} \right) \quad (5.5)$$

notwendig, wobei mit  $S_i$  bzw.  $S_g$  die Teil- bzw. Gesamtfläche in  $m^2$  und mit  $R_{w,i}$  das Schalldämm-Maß der Teilfläche  $S_i$  in  $dB$  bezeichnet wird.

## 5.3 Konstruktive Einflußfaktoren

Die konstruktive Ausbildung von Fenstern kann aufgrund gestalterischer oder bauphysikalischer Aspekte stark variieren. Fenster bestehen aus einem Traggerippe (Rahmen, Pfosten, Riegel) und der Verglasung. Man unterscheidet sie nach der Konstruktionsart des Rahmens in Einfachfenster, Verbundfenster, aufgedoppelte Fenster und Kastenfenster und nach der Gestaltung der Verglasung. So wird eine Scheibe in einem Flügel oder Blendrahmen als *Einfachverglasung* bezeichnet und von *Doppelverglasung* spricht man bei zwei hintereinander liegenden, einfachen Scheiben. *Isolierverglasung* (s. Abb. 5.3) besteht aus mehreren Scheiben, die durch luft- oder

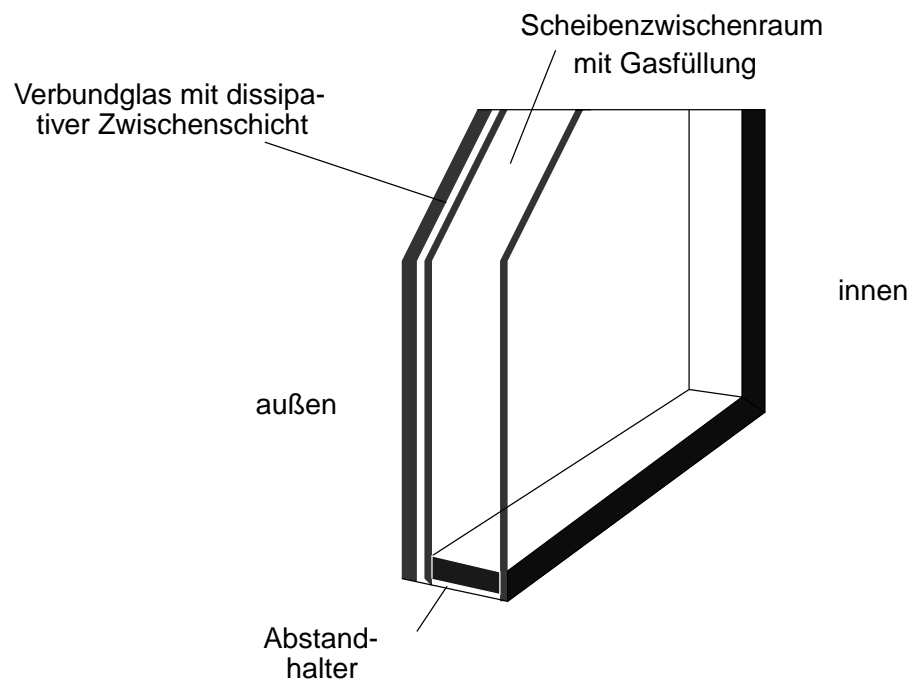


Abbildung 5.3: Schnitt durch ein Isolierglasfenster

gasgefüllte Zwischenräume getrennt und luft- und feuchtigkeitsdicht miteinander verbunden sind [104].

Die Schalldämmung eines Fensters ist daher von vielfältigen konstruktiven Einflußfaktoren abhängig. Naheliegender ist zum Beispiel die Abhängigkeit der Schalldämmung von der Dicke und von der Anzahl der verwendeten Glasscheiben. Zwar sind die Isolierverglasungen ursprünglich zur Erhöhung des Wärmeschutzes durch die Fenster entwickelt worden, allerdings hat sich die Bedeutung auch für die schallschutztechnische Verbesserung der Bauteileigenschaften gezeigt. Nur mit Isolierverglasungen lassen sich Fenster mit einer sehr guten Schalldämmung realisieren, so daß sich die exemplarischen Berechnungen in Abschnitt 6 mit diesen beschäftigen, wobei auch der Einfluß der Gasfüllung des Scheibenzwischenraums untersucht wird.

Bedeutend für die Schalldämmung von Fenstern ist daneben die Ausbildung des Fensterrahmens und die Dichtheit der Fensterfugen. Bei den Fugen muß das Augenmerk darauf gelegt werden, daß trotz ausreichendem Luftaustausch die Schalldämmung gewährleistet ist. Um dies sicherzustellen, werden zum Teil absorbierend ausgebildete Fugen gebaut. Die Schalldämmung hängt deshalb nicht direkt von der Luftdurchlässigkeit der Fuge ab, sondern vor allem von deren Abmessung und konstruktiver Gestaltung.

Die Schalldämmung des Fensterrahmens kann durch Erhöhung der flächenbezogenen Masse des Rahmens, geringere Rahmenbreiten sowie die Versteifung des Blendrahmens durch Metallprofile verbessert werden. Daneben gibt es die Möglichkeit, durch einen zweischaligen Aufbau des Rahmens, bei dem auf den Blendrahmen eine Masse mit zwischenliegender Dämmschicht aufgebracht wird, die Dämmung zu verbessern [70, 80].

Der Einfluß der Gestaltung des Rahmens auf die schalldämmende Wirkung der Fensters soll in dieser Arbeit nicht vertieft studiert werden und ausschließlich mit Hilfe der unterschiedlichen Lagerungsbedingungen (s. Abschnitt 6.4) in die Berechnungen einfließen.

Negativ auf die Schalldämmung wirken sich daneben Einbauten aus, die die Dichtheit der Fenster herabsetzen, wie zum Beispiel Dichtungsklappen oder Rolladenkästen [40]. Auch diese möglichen Gründe für eine nicht befriedigende Schalldämmung eines Gebäudes sollen hier nicht eingehender studiert werden.

Im weiteren wird zunächst gezeigt, wie die genannten Einflußfaktoren den prinzipiellen Verlauf des Schalldämm-Maßes bestimmen. Der Abschnitt 5.4.1 und die Berechnungsbeispiele in Abschnitt 6 werden dann verdeutlichen, wie das entwickelte numerische Berechnungsverfahren den Planer beim Entwurf unterstützen kann, indem der Einfluß konstruktiver Änderungen auf die Schalldämmung des Fensters vorab berechnet wird und die Anpassung an unterschiedliche Belastungen, d.h. Lärmsituationen erfolgen kann.

### 5.3.1 Prinzipieller Verlauf des Schalldämm-Maßes eines einschaligen Bauteils

Die Schalldämmkurve eines einschaligen Bauteils verläuft im Prinzip entsprechend Abbildung 5.4. Bis in die Nähe der Grenzfrequenz (vgl. Abschnitt 2.1.2) genügt die Abhängigkeit des

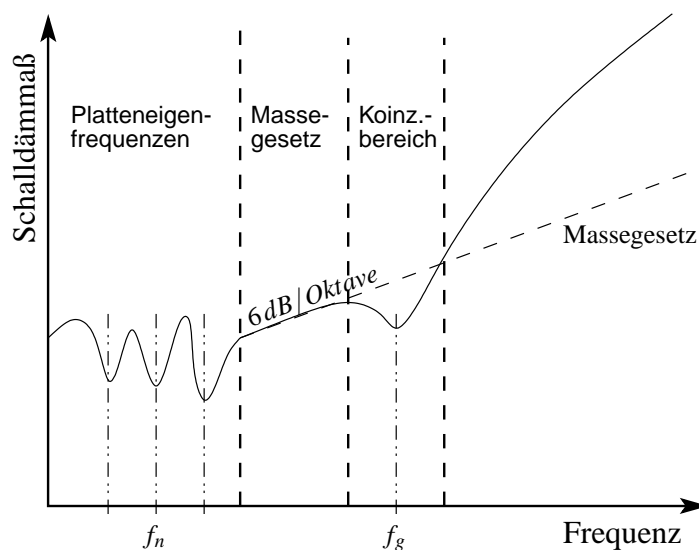


Abbildung 5.4: Typischer Verlauf der Schalldämmung eines einschaligen Bauteils [58]

Schalldämm-Maßes von der Frequenz dem sogenannten *Bergerschen Massegesetz*, mit dem man das Schalldämm-Maß bei bekannter flächenbezogener Masse  $m'$  und bekanntem Wellenwiderstand der Luft  $Z_L$  in Abhängigkeit vom Schalleinfallswinkel  $\alpha$  berechnen werden kann [13]:

$$R = 10 \cdot \lg \left( 1 + \left( \frac{\pi f m' \cos \alpha}{Z_L} \right)^2 \right) \quad [dB] \quad (5.6)$$

Durch Gleichung (5.6) wird deutlich, daß die Schalldämmung abhängig ist vom Winkel zum Lot auf die Platte, unter dem der Schall auf die Platte trifft. Für *senkrechten Schalleinfall* wird der Schalleinfallswinkel  $\alpha$  annähernd gleich Null und die schalldämmende Wirkung des Bauteils ist damit besonders gut. Bei sehr großen Schalleinfallswinkeln ( $\alpha \rightarrow 90^\circ$ ) spricht man von *streifendem Schalleinfall*. Für große Winkel ist die Schalldämmung nach Gleichung (5.6) gering. Sind alle Einfallswinkel gleich wahrscheinlich, so handelt es sich um *diffusen Schalleinfall*. Das Bergersche Massegesetz für diffusen Schalleinfall besagt, daß sich sowohl bei einer Frequenzerhöhung um eine Oktave als auch bei Verdoppelung der flächenbezogenen Masse des Trennbauteils eine Verbesserung des Schalldämm-Maßes um 6 dB einstellt.

Allerdings ist das Massegesetz nur in einem beschränkten Frequenzbereich zutreffend. Für tiefe Frequenzen wird die Schalldämmkurve durch die Platteneigenfrequenzen dominiert. Im Bereich der Grenzfrequenz kommt es zu einer Verschlechterung des Schalldämm-Maßes und für Frequenzen oberhalb der Grenzfrequenz steigt die Schalldämmung dann stärker als 6 dB/Oktave, die sich aus dem Massegesetz ergeben. Daraus ergibt sich die prinzipielle Schalldämmkurve für bauakustische Problemstellungen nach Abbildung 5.4, die allerdings für die zu untersuchenden Trennbauteile - die Glasscheiben von Fenstern - etwas modifiziert werden muß. Die Eigenfrequenzen der dünnen Platten liegen im Vergleich zu Platten größerer Dicke (z. B. Wände) bei höheren Frequenzen. Es findet sich daher bei der Untersuchung der Schalldämmung von Fenstern der massedominierte Frequenzbereich nicht so stark ausgeprägt (vgl. Berechnungen im Abschnitt 6).

Die Verschlechterung der Schalldämmwirkung für größere Schalleinfallswinkel läßt sich anschaulich für den Fall der unendlich ausgedehnten, schallabstrahlenden Platte (vgl. Abschnitt 2.1) erklären: Falls die Anregung der Platte durch senkrechten Schalleinfall erfolgt, so ist die Belastung durch den Schalldruck zu jedem Zeitpunkt überall gleich. Im Prinzip müßte sich die Platte daher als Einheit bewegen. Bei streifendem Schalleinfall kommt es zu einer räumlich veränderlichen Belastung durch den Schalldruck. Dadurch wird die Platte in ungleichförmige Biegebewegung versetzt. Als erste Konsequenz für die Schalltransmission durch eine endliche Platte ergibt sich eine verstärkte Anregung auch der unsymmetrischen Plattenmoden beim streifenden Schalleinfall, was sich naturgemäß negativ auf die Schalldämmung auswirkt.

Zieht man die Kopplungsbedingung für die Beschleunigung eines idealen Fluids und einer Struktur nach Gleichung 4.16 heran, wird zudem deutlich, daß der abgestrahlte Schall winkelabhängig ist. In Abbildung 5.5 ist die Schalltransmission durch ein Trennbauteil dargestellt, daß zwei Fluide gleicher Materialeigenschaften voneinander trennt, wobei die Ausbreitungsrichtungen der Schallwellen im Fluid durch sogenannte „Schallstrahlen“ gekennzeichnet sind. Für diesen Spezialfall gleicher Umgebungsmedien ist der Schalleinfallswinkel, der Winkel der reflektierten Welle und auch der Abstrahlwinkel identisch. Die Kopplungsbedingung für den abgestrahlten Schallfluß lautet demnach in Abhängigkeit von der Schnelle der Fluidpartikel in Transmissionsrichtung  $v^r$ , der Plattenbewegung in Normalenrichtung  $u_N$  und dem Abstrahlwinkel  $\alpha$  :

$$q = \frac{\partial p}{\partial n} = -i\omega\rho_F v_n = -i\omega\rho_F v^r \cos\alpha = \rho_F \omega^2 w \quad (5.7)$$



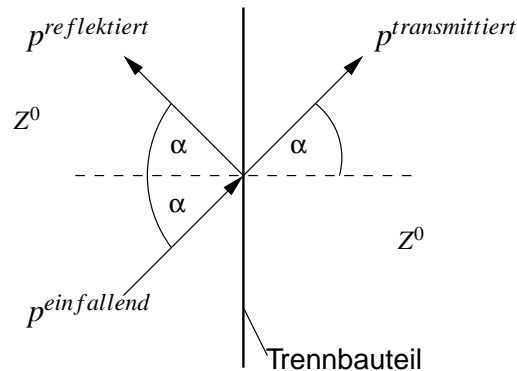


Abbildung 5.5: Schalltransmission durch ein Trennbauteil, falls das Umgebungsmedium beidseitig gleich ist

Mit der Definition für den Wellenwiderstand  $z^o$  (vgl. Gl. 2.96) folgt daraus

$$-i\omega\rho_F \frac{p^{tr}}{z^o} \cos \alpha = \rho_F \omega^2 u_N$$

bzw.

$$p^{tr} = \omega u_N z^o \frac{1}{\cos \alpha} \quad (5.8)$$

für den transmittierten Schalldruck an der Koppelfläche. Aus Gleichung 5.8 ist ersichtlich, daß für größere Winkel  $\alpha$  der Schalldruck an der Koppelfläche zunimmt, d.h. bei zunehmend streifendem Schalleinfall und damit zunehmend streifender Schallabstrahlung verbessert sich die Schalltransmission, womit eine starke Verschlechterung der Schalldämmung einhergeht. Da der Wellenwiderstand sich um den Faktor  $\frac{1}{\cos \alpha}$  vergrößert, kann man von einer „Versteifung“ des Umgebungsmediums bei streifendem Schalleinfall sprechen, in der die verbesserte Schallabstrahlung begründet ist.

### Einfluß der Materialparameter

Der Einfluß des Scheibengewichts auf die schalldämmende Wirkung des Fensters kann aus dem Massegesetz (5.6) abgelesen werden: Mit zunehmender Masse verbessert sich der Schalldämmwert des Bauteils. Hieraus wird ersichtlich, daß durch eine dickere Scheibe eine bessere Schallisolierung gegenüber einer dünneren Scheibe gleichen Materials zu erwarten ist.

Der zweite bestimmende Faktor für die Schalldämmung ist die Steifigkeit der Scheibe: Die Schalldämmung verbessert sich mit abnehmender Scheibensteifigkeit, da die Grenzfrequenz (vgl. Gl. (2.9)) dann zu höheren Frequenzen hin aus dem für die Bauakustik relevanten Frequenzbereich verschoben wird.

Diese beiden Einflüsse können gegenläufig wirken und sich deshalb kompensieren, da z.B. die Steifigkeit der Schale nicht alleine durch das gewählte Material beeinflusst wird, sondern auch von deren Dicke. Mit der Dicke erhöht sich jedoch auch die flächenbezogene Masse

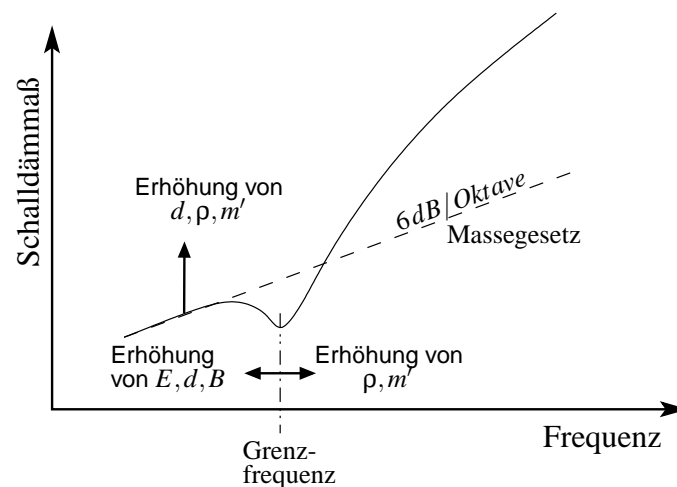


Abbildung 5.6: Einfluß der Änderung von Materialparametern auf die Schalldämmkurve eines einschaligen Bauteils [58]

des Bauteils. Eine dickere Schale verbessert damit die massebezogenen Dämmung eines Bauteils. Durch eine vergrößerte Steifigkeit kann es allerdings in einem sensiblen, d.h. in der Bauakustik relevanten Frequenzbereich aufgrund der niedrigeren Grenzfrequenz zu einem Einbruch der schalldämmenden Wirkung kommen. Zur tatsächlichen Abschätzung des akustischen Verhaltens ist daher eine detaillierte Betrachtung notwendig. Die qualitativen Auswirkungen von Materialänderungen auf die Schalldämmung eines einschaligen Bauteils sind Abbildung 5.6 zu entnehmen.

### 5.3.2 Prinzipieller Verlauf des Schalldämm-Maßes eines zweischaligen Bauteils

Im Hochbau werden zwei- bzw. mehrschalige Konstruktionen mit einer Füllung des Hohlraums durch Luft oder Dämmmaterial verwendet, wodurch auch die Schalldämmung gegenüber einem gleichschweren, einschaligen Bauteil verbessert werden soll. Wie stark die Verbesserung ist, hängt vor allem von der Kopplung der einzelnen Schalen über die Zwischenschicht ab. Die Kopplung über konstruktive Verbindungselemente, wie sie bei Ständerkonstruktionen von Wänden oder Sprossenfenstern vorkommen, sollen hier allerdings nicht vertieft betrachtet werden. Häufig wird zur Veranschaulichung des akustischen Verhaltens das zweischalige Bauteil durch ein Schwingungssystem aus zwei Massen - also den beiden Schalen - und die verbindende Feder - das Luftpolster - ersetzt (s. Abb. 5.7).

Der Verlauf der Schalldämmkurve kann dann im Prinzip gemäß Abbildung 5.8 skizziert werden, wobei eine Aufteilung in drei Bereiche sinnvoll ist: Für niedrige Frequenzen entspricht die Schalldämmung des Schwingungssystems der eines gleich schweren einschaligen Bauteils und die beiden Schalen schwingen in Phase. Im Bereich der Resonanzfrequenz  $f_0$  verschlechtert sich die Schalldämmung, da die Schalen mit maximaler Amplitude gegeneinander schwingen. Oberhalb der Resonanzfrequenz verbessert sich das Schalldämm-Maß gegenüber dem gleich

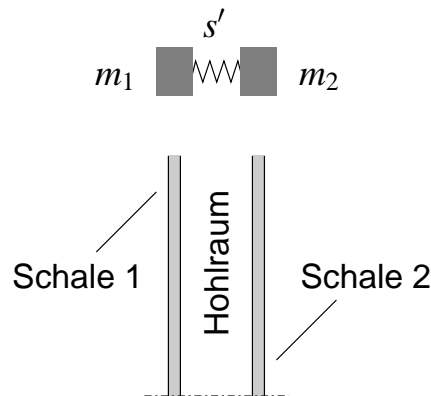


Abbildung 5.7: Ersatzmodell eines zweischaligen Bauteils: Masse-Feder-Masse Modell

schweren, einschaligen Bauteil stärker, da die Schalen nun unabhängig voneinander schwingen. Zu markanten Einbrüchen der Schalldämmkurve kommt es weiterhin bei den Grenzfrequenzen der einzelnen Schalen  $f_g$  und den Hohlraumresonanzen  $f_{st}$ , die auf die Eigenschwingungen des Hohlraumes zurückzuführen sind und bei denen sich eine stehende Welle bildet.

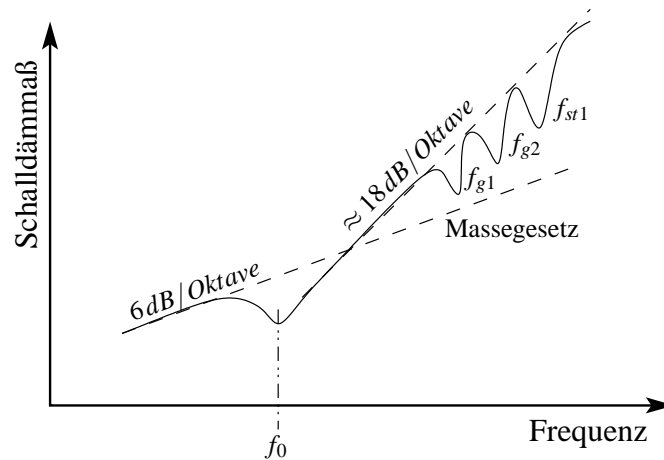


Abbildung 5.8: Typischer Verlauf der Schalldämmung eines zweischaligen Bauteils [58]

Die Grundresonanz  $f_0$  des zweischaligen Bauteils kann annähernd mit Hilfe des Masse-Feder-Masse Modells angegeben werden [43].

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{Z_{Luft} \cdot c_{Luft}}{d} \cdot \left( \frac{1}{m'_1} + \frac{1}{m'_2} \right)} \quad (5.9)$$

In die Berechnung der Resonanzfrequenz geht die Impedanz  $Z$  und die Schallgeschwindigkeit  $c$  der Zwischenschicht sowie der Schalenabstand  $d$  und die flächenbezogenen Massen  $m'_1$  und  $m'_2$  in  $\frac{kg}{m^2}$  der einzelnen Schalen ein. Zur Bestimmung dieser Grundresonanz geht man näherungsweise davon aus, daß die beiden Schalen unendlich ausgedehnt sind. Die Abweichung

der tatsächlichen Lage der Grundresonanz von der nach Gleichung (5.9) ermittelten Lage kann daher insbesondere für kleine zweischalige Bauteile erheblich sein.

### Einfluß des Schalenabstandes

Die Vergrößerung des Schalenabstandes führt nicht nur zu einer Verringerung der Kopplung zwischen den beiden Schalen und damit zu einer Verbesserung der Schalldämmung, es wird mit zunehmendem Abstand die Resonanzfrequenz zu tieferen Frequenzen verschoben (vgl. Gl. (5.9)). Allerdings resultieren aus einem größeren Schalenabstand und damit größerem Hohlraum Resonanzen mit stehenden Wellen bei im Verhältnis niedrigeren Frequenzen (vgl. Gl. (2.101)). Diesem Problem wird in der Praxis durch die Anordnung eines porösen Dämmstoffs am Rahmen Rechnung getragen.

### Schalenaufbau

Die geometrischen Einflußfaktoren wie Scheibendicke und Schalenabstand auf die Schalldämmung wurden in den Abschnitten 5.3.1 und 5.3.2 erläutert. Die akustischen Eigenschaften sind zudem abhängig vom Aufbau der Schalen, insbesondere zeigen sich Unterschiede im Schalldämm-Maß eines Bauteils mit symmetrischem Schalen Aufbau (d.h. zwei Schalen gleicher Dicke) und einem Bauteil mit Schalen unterschiedlicher Dicke. Dabei zeigen Bauteile mit voneinander abweichenden Schalendicken eine bessere Schalldämmung, da die Koinzidenzfrequenzen der beiden Einzelschalen voneinander abweichen.

### Gasfüllung

Wie eingangs des Abschnitts 5.3 erläutert, wurden Isolierverglasungen zunächst zur Verbesserung der Wärmedämmung entwickelt, die verbesserte Schalldämmung war ein positiver Nebeneffekt. Durch diese Tatsache läßt sich erklären, daß die verwendete Füllung bei diesen Isolierfenstern häufig aus einem Gas mit höherer Dichte als Luft bestehen, wie sie bei Wärmeschutzverglasungen verwendet werden. Allerdings weisen auch Fenster, die mit einem leichteren Gas gefüllt sind, verbesserte schallschutztechnische Eigenschaften auf [48, 49]. Die Verbesserung vor allem bei mittleren und höheren Frequenzen infolge der Füllung mit einem leichten oder mit einem schweren Gas ist allerdings auf zwei völlig unterschiedliche physikalische Ursachen zurückzuführen (s. Abb. 5.9):

Bei der Füllung mit einem sehr *leichtem Gas* wie zum Beispiel Helium ( $c_{He} = 1000 \frac{m}{s}$ ) oder Wasserstoff ( $c_H = 1300 \frac{m}{s}$ ) ist die Verbesserung der Schalldämmung in der größeren Schallgeschwindigkeit im Vergleich zu Luft ( $c = 346 \frac{m}{s}$ ) zu finden. Die Schwingungen, die im Scheibenzwischenraum ausgelöst werden, sind daher sehr klein. Dieses Phänomen tritt analog zum Schallabstrahlverhalten von dünnen Platten auf: Solche biegeweichen Platten strahlen weit weniger Schall ab, wenn sie zu Biegeschwingungen angeregt werden als dicke, steife Platten, die gleich stark schwingen (vgl. Abschnitt 5.3.1). Somit ist die Schalldämmung eines leichtgasgefüllten Fensters aufgrund des sogenannten akustischen Kurzschlusses sehr gut. Bei einer Leichtgasfüllung erfolgt im bauakustisch relevanten Frequenzbereich die Schallanregung immer unterhalb der Grenzfrequenz, so daß nur ein Nahfeld abgestrahlt wird, das sehr schnell

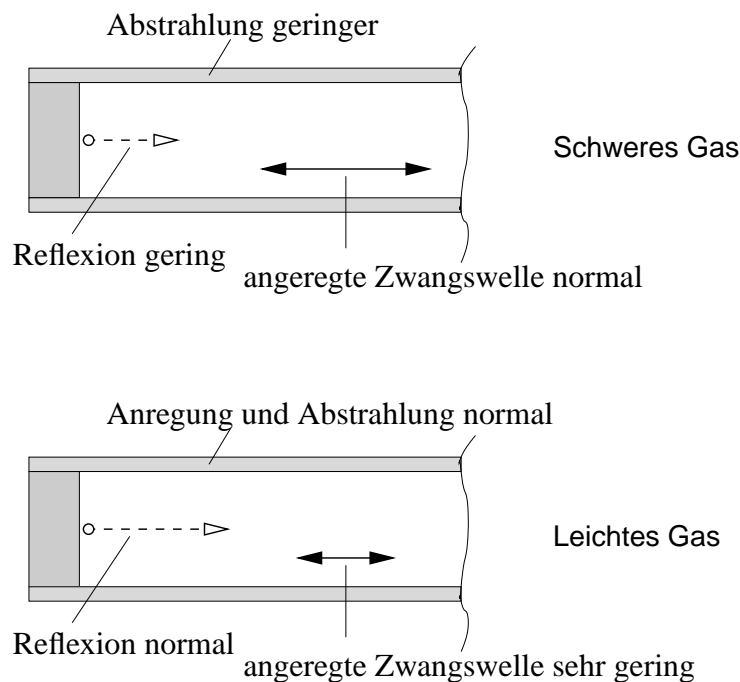


Abbildung 5.9: Zur physikalisch unterschiedlichen Wirkung von schweren und leichten Gasen bei der Schallübertragung von Isolierglasscheiben [49]

abklingt. Allerdings ist die praktische Anwendung eines extrem leichten Gases problematisch, da es Diffusionsverluste infolge des Gasdruckgefälles geben kann.

Bei der Füllung mit einem *schweren Gas* wie zum Beispiel Kohlendioxid ( $c_{CO_2} = 270 \frac{m}{s}$ ) oder Schwefelhexafluorid ( $c_{SF_6} = 130 \frac{m}{s}$ ) ist die Verbesserung in der wesentlich kleineren Schallgeschwindigkeit im Vergleich zu Luft begründet. Die Reflexionen an den Rändern des Scheibenzwischenraumes werden besonders klein, so daß die Resonanzschwingungen dieses Hohlraums unterdrückt werden. Der Schallpegel verringert sich im Scheibenzwischenraum bei Füllung mit einem schweren Gas. Die Gasfüllung wirkt ähnlich wie eine Füllung des Hohlraums mit einem schallabsorbierendem Material. Allerdings sollte der Nutzen bei der Verwendung von Schwergasen jeweils kritisch untersucht werden, da es sich bei diesen in der Regel um Treibhausgase handelt.

### Dreifachverglasung

Dreifachverglaste Fenster werden im Hochbau verwendet, um die Wärmedämmung zu verbessern. Zunächst liegt die Vermutung nahe, daß durch die Dreifachscheiben auch die Schalldämmung verbessert werden kann. Diese Vermutung trifft allerdings nicht zu, da die Dicke jeder der zwei Luftschichten bei einer Dreifachverglasung geringer ist als der einen Luftschicht bei Zweifachverglasung. Die Kopplung der Scheiben ist daher bei Dreifachverglasung über die dünnere „Luftfeder“ besser, so daß sich die Schalldämmung verschlechtert. Bei gleicher Gesamtkonstruktionsdicke und gleicher Gesamtglasdicke verhalten sich Dreifachverglasungen im

allgemeinen ungünstiger als Zweifachverglasungen.

### 5.3.3 Lagerung

Die Ausführungen zu den Auswirkungen der konstruktiven Einflußfaktoren in den vorherigen Abschnitten basieren zum Großteil auf Veranschaulichungen des akustischen Verhaltens eines unendlich ausgedehnten Trennbauteils, die allerdings mit nur geringen Einschränkungen für die in der Realität vorkommenden endlichen Scheiben übertragen werden können.

Die endlichen Glasscheiben eines Fensters sind in eine Rahmenkonstruktion eingefast. Da über diese Rahmenkonstruktion Körperschall weitergeleitet werden kann, hat die konstruktive Gestaltung dieses Rahmens Einfluß auf die Schalldämmung des Fensters. Vernachlässigt man zunächst diesen Weg der Schallausbreitung, so ist zumindestens die Art der Lagerung der Glasscheiben am Rahmen von Bedeutung: Eine vollkommen feste Einspannung hat ein Bauteil großer Steifigkeit mit den beschriebenen Einflüssen auf die Grenzfrequenz zur Folge (vgl. Abb. 5.6). Die Art der Lagerung beeinflusst außerdem die Reflexion der Körperschallwellen in der Scheibe und damit die Abstrahlung von Luftschall (vgl. Abschnitt 2.1.2). Daneben führt die eventuelle Verkleidung des Rahmens durch absorbierendes Material auf eine gedämpfte Lagerung, die die Schwingungsamplituden der Scheibenschwingungen mindert und damit die Schallabstrahlung verringert.

### 5.3.4 Verbundglas

Insbesondere aus dem Automobilbau ist die Verwendung von Verbundsicherheitsglas bekannt. Bei diesen Sicherheitsgläsern werden zwei oder mehr Scheiben durch dünne Kunststoffschichten flächig miteinander verbunden, wobei als Verbindungsschicht häufig Folien aus Polyvinylbutyral verwendet werden [59]. Eine andere Möglichkeit besteht in der Verklebung der beiden Scheiben durch eine Gießharzschicht (z.B. aus Polyurethan) [91]. Die Kunststoffzwischen-schicht erhöht zudem in Kraftfahrzeugen die Sicherheit bei Bruch oder Einschlag in die Scheibe, da sich Glassplitter von der Zwischenschicht nur schwer lösen können.

Daneben haben Verbundgläser aber auch positive akustische Eigenschaften, die heute im Hochbau gezielt genutzt werden: In der Kunststoffzwischen-schicht wird Energie dissipiert, so daß der Verlustfaktor eines Verbundglases im Vergleich zu Normalgläsern höher ist. Außerdem erhöht sich die Biegesteifigkeit bei Verwendung dickerer Verglasungen mit diesen geschichteten Gläsern im Gegensatz zu einer einzelnen, dickeren Glasschicht nicht. Fenster aus Verbundglas weisen daher hohe Koinzidenzgrenzfrequenzen auf.

Im mechanischen Sinne handelt es sich bei Verbundglasscheiben um ein Laminat aus drei Schichten. Die Dämpfung der Biegeschwingungen von Fenstern aus Verbundglas kann daher durch eine dreischichtige Platte mit visko-elastischer Zwischenschicht analog zu Abschnitt 2.2.5 beschrieben werden.

## 5.4 Numerische Simulation

### 5.4.1 Konzeptionelles Vorgehen

Mit den Gleichungen (4.25) bis (4.30) kann das Schallfeld in einem Raum eines Gebäudes, der von der Umgebung durch ein doppeltverglastes Fenster abgeschirmt wird, berechnet werden. Daneben liefert die Lösung dieses Gleichungssystem die Auslenkungen der Glasscheiben des Fensters, das Schallfeld vor dem Gebäude und zudem auch die Schalldruckverteilung im Scheibenzwischenraum. Ein Eindruck von der gesamten Lärmsituation in bzw. vor einem Gebäude kann deshalb durch die Visualisierung der Schalldruckverteilungen erlangt werden. An jedem beliebigen Punkt des Systems kann bei der Berechnung der Schalldruck analysiert werden. Dies ist ein großer Vorteil gegenüber der experimentellen Ermittlung des Schalldämm-Maßes, da beim Meßverfahren nach DIN EN ISO 140 zur Ermittlung des Schalldämm-Maßes eines Trennbauteils die Lärmsituation nur an wenigen Punkten des Raumes gemessen wird [35].

Aus den numerisch berechneten Schallfeldern können auch die für die bauphysikalischen Nachweise erforderlichen Kenngrößen ermittelt werden. Deshalb werden zur Interpretation der Ergebnisse für die unterschiedliche Konfigurationen die folgenden Auswertungsschritte vorgenommen: Zunächst wird aus den Schalldruckverteilungen der mittlere Schallpegel nach Gleichung (5.3) vor und hinter dem Fenster für jede Frequenz bestimmt. Aus den Schalldruckpegeln am Sende- und Empfangsort kann dann mit Hilfe von Gleichung (5.2) das Schalldämm-Maß für jede Frequenz bestimmt werden. Das Schalldämm-Maß abgetragen über der Frequenz liefert die charakteristische Schalldämmkurve. Aus der Schalldämmkurve kann das resultierende Schalldämm-Maß wie in Abschnitt 5.1 beschrieben als arithmetisches Mittel der einzelnen Schalldämm-Maße für die Terzmittenfrequenzen oder für den gesamten Frequenzbereich berechnet werden.

Dieser Einzahlwert könnte dann im Prinzip Grundlage für einen Nachweis gegen Außenlärm sein (vgl. Abschnitt 5.2), allerdings liegen den folgenden Berechnungen noch einige Vereinfachungen zugrunde: So bleibt bisher unberücksichtigt, daß zwar bei einer realen Außenhaut eines Gebäudes die Schalltransmission hauptsächlich durch die Durchlässigkeit des Fensters bestimmt wird, aber auch durch die Wand erfolgt. Daneben findet im Berechnungsmodell die Schalltransmission durch den Fensterrahmen und die Kopplung der Scheiben über den Rahmen keine Berücksichtigung. Außerdem ist in den Berechnungen die Schallübertragung durch die flankierenden Bauteile vernachlässigt. Bei der berechneten Bauteilkenngröße handelt es sich deshalb bisher nicht um das Bauschalldämmmaß  $R'_{res}$  nach Abschnitt 5.1. Zudem soll hier zunächst nur das unbewertete Schalldämm-Maß von Interesse sein.

Mit diesen Einschränkungen spiegelt das im folgenden Abschnitt berechnete Schalldämm-Maß die Schalldämmung des jeweiligen Außenbauteils wider. Für einen etwaigen Vergleich der berechneten Werte mit Meßwerten sei darauf hingewiesen, daß bei der Bestimmung des Schalldämm-Maßes durch Messungen davon ausgegangen wird, daß sowohl vor als auch hinter dem Trennbauteil ein Diffusfeld vorhanden ist. Bei der Kopplung eines mit Finiten Elementen diskretisierten Gebäudes mit einem Randelementgebiet trennt das Außenbauteil jedoch – so wie es sich auch in der Realität darstellt – ein Diffusfeld (im Raum) von einem Freifeld (der Umgebung). Insbesondere ist bei einer Belastung des Bauteils durch Lärm im Innern

des Gebäudes zu erwarten, daß die Schallpegeldifferenz in der tatsächlichen Einbausituation größer ist, da die Schallwellen im Freifeld auslaufen können und daher der Schallpegel vor dem Gebäude geringer ist.

### 5.4.2 Diskretes Modell

Die Diskretisierung der Berechnungsmodelle für die Anwendungsbeispiele im folgenden Abschnitt 6 erfolgt unter Berücksichtigung generell zu erfüllender Anforderungen:

- Die zur Diskretisierung von Fluid bzw. Platte verwendeten Finiten Elemente erfüllen die Konvergenzkriterien (vgl. Abschnitt 3).
- Die Diskretisierungsoberfläche des Randelement-Halbraums wird so groß gewählt, daß sie in jeder Ausdehnungsrichtung ca. dreimal der Größe der Lasteinleitungszone entspricht, damit der Abbruchfehler am Diskretisierungsrand die Lösung nicht signifikant beeinflußt (vgl. Abschnitt 3.2.3).
- Die Anzahl der Elemente und der untersuchte Frequenzbereich werden so abgestimmt, daß die Diskretisierungsregel von mindestens „sechs Elementen pro Wellenlänge“ erfüllt ist. Diese Dichte von diskreten Berechnungspunkten ist erforderlich, um das physikalische Verhalten des Systems auflösen zu können.



## 6 Anwendungen

Nachdem im vorherigen Kapitel die prinzipiellen Einflußfaktoren auf die Schalldämmung von Trennbauteilen aufgezeigt wurden, soll im weiteren das vollständig gekoppelte Berechnungsverfahren aus Finite-Element- und Randelementmethode angewendet werden, um die Schalltransmission durch Isolierverglasungen zu untersuchen.

Als Modellkonfiguration wird gemäß Abb. 6.1 zunächst ein Rechteckraum der Größe  $1m \times 1m \times 0,5m$  gewählt (s. Abschn. 6.1–6.4). Dieser luftgefüllte Raum hat schallharte Wände und wird von der Umgebung durch eine eingespannte, zweischalige Isolierverglasung mit den Abmessungen  $1m \times 1m$  getrennt. Die Oberfläche des Abstandhalters zwischen den Glasscheiben (vgl. Abb. 5.3) weist nicht absorbierende Randbedingungen mit einem Reflexionsgrad von -1 auf, die Wände des Scheibenzwischenraums sind also nach der Definition in Kapitel 2.3.3 schallweich. An dieser Modellgeometrie werden konstruktive Einflüsse wie Scheibendicke, Scheibenabstand und –aufbau (s. Abschn. 6.1, 6.2), Hohlraumfüllung (s. Abschn. 6.3) und Lagerung (s. Abschn. 6.4) untersucht und die Schalldämmung von Isolierverglasung bei Lärm im Innern des Gebäudes der Dämmung bei Lärm außerhalb des Gebäudes gegenübergestellt.

Dabei wird Lärm im Innern des Gebäudes durch einen konstant vorgeschriebenen Schalldruck von  $1 \frac{N}{m^2}$  an der fensterabgewandten Stirnfläche des Raumes simuliert bzw. es werden durch Änderung der Lage von einer Schallquelle bzw. mehrerer Schallquellen außerhalb des Gebäudes unterschiedliche charakteristische Belastungen des Trennbauteils in Form von normalem, streifendem oder diffusem Schalleinfall studiert und Unterschiede der Schalltransmission bei äußeren Lärmquellen im Vergleich zu Lärm im Inneren von Gebäuden aufgezeigt.

Im zweiten Teil dieses Kapitels (s. Abschnitte 6.5–6.7) werden die Unterschiede im akustischen Verhalten von zweischaliger, luftgefüllter Isolierverglasung bei unterschiedlichen Raumgeometrien untersucht. Dabei werden die Berechnungen mit Plattendicken von  $0,0115m$  bzw.  $0,0095m$  für die äußere bzw. innere Glasscheibe und einer Breite des Scheibenzwischenraums von  $0,02m$  bei drei unterschiedlichen Räumen mit den Abmessungen  $1m \times 0,5m \times 0,5m$ ,  $1m \times 0,5m \times 1m$  bzw.  $1m \times 0,5m \times 0,7m$  durchgeführt. An diesen Modellkonfigurationen mit schallharten Wänden im Raum und schallweichen Wänden im Scheibenzwischenraum wird neben dem Einfluß der geometrischen Verhältnisse (s. Abschn. 6.5) wiederum der Einfluß der Anregung (s. Abschn. 6.6) - in diesem Fall bei Schall im Rauminnern - untersucht. Da außerdem eine Änderung der Randbedingungen im Scheibenzwischenraum eine Veränderung des Isolierverhaltens mit sich bringt, findet sich in Abschnitt 6.7 die Berechnung der Schalldämmung für unterschiedliche Wandbeschaffenheiten.

Als Maß für die Güte der Schalldämmung dient für alle Modelle das Schalldämm-Maß nach Gleichung (5.2), das in einem Frequenzbereich von 100–900 Hz ermittelt wird. Um den quantitativen Vergleich der Schalldämmkurven zu erleichtern, wird bei einigen Berechnungsbeispielen die Terzmittelung nach Abschnitt 5.1 durchgeführt.

## 6.1 Schalldämmung von zweischaliger Isolierverglasung bei Lärm im Rauminnern

Aus Kapitel 5 ist bekannt, daß die maßgebenden geometrischen Einflußfaktoren auf die Schalldämmung eines mehrschaligen Bauteils zum einen die Bauteildicke und zum anderen der Abstand zwischen den Einzelschalen ist. Die Auswirkungen von Änderungen der Scheibendicke und des Scheibenzwischenraums werden zunächst für den Fall einer gegebenen Lärmsituation im Innern des Raumes untersucht (s. Tabelle 6.1). In den Abbildungen 6.2 bis 6.4 sind die Schalldämmkurven für den berechneten Frequenzbereich von 100 bis 900 Hz dargestellt.

Scheibenaufbau	Scheibendicke (innen) [mm]	Zwischenraum [mm]	Scheibendicke (außen) [mm]
asymmetrische, dicke Scheiben mit großem Abstand	9,5	20	11,5
symmetrische, dicke Scheiben mit großem Abstand	10,5	20	10,5
asymmetrische, dicke Scheiben mit kleinem Abstand	9,5	10	11,5
asymmetrische, dünne Scheiben mit kleinem Abstand	4	10	6

Tabelle 6.1: Aufbau der Isolierverglasung für die unterschiedlichen Beispielkonfigurationen

Der *Einfluß der Scheibendicke* wird an einer asymmetrischen Scheibenkonfiguration untersucht, bei der jeweils die äußere Scheibe dicker als die raumseitige Glasscheibe ist. Die dickere Isolierverglasung besteht aus Scheiben der Dicke 11,5 bzw. 9,5 mm, die dünnere Verglasung aus Scheiben der Dicke 6 bzw. 4 mm. Zu erwarten ist, daß eine Verglasung mit einer zunehmenden Gesamtglasdicke in der Regel eine bessere Schalldämmung aufweist (vgl. Abb. 5.6). Dies bestätigt sich für das untersuchte Beispiel: Der Verlauf beider Schalldämmkurven ist ähnlich in Abbildung 6.2, wobei jedoch aufgrund der unterschiedlichen Plattendicken die Resonanzpeaks der strukturellen und der Masse-Luft-Masse Eigenfrequenzen verschoben sind. Die Masse-Luft-Masse-Grundresonanz verschiebt sich von ca. 300 Hz für die Konfiguration mit den dickeren Glasscheiben hin zu höheren Frequenzen für die Anordnung mit den dünneren Glasscheiben. Allerdings liegt, wie zu erwarten ist, das Schalldämm-Maß der Verglasung mit

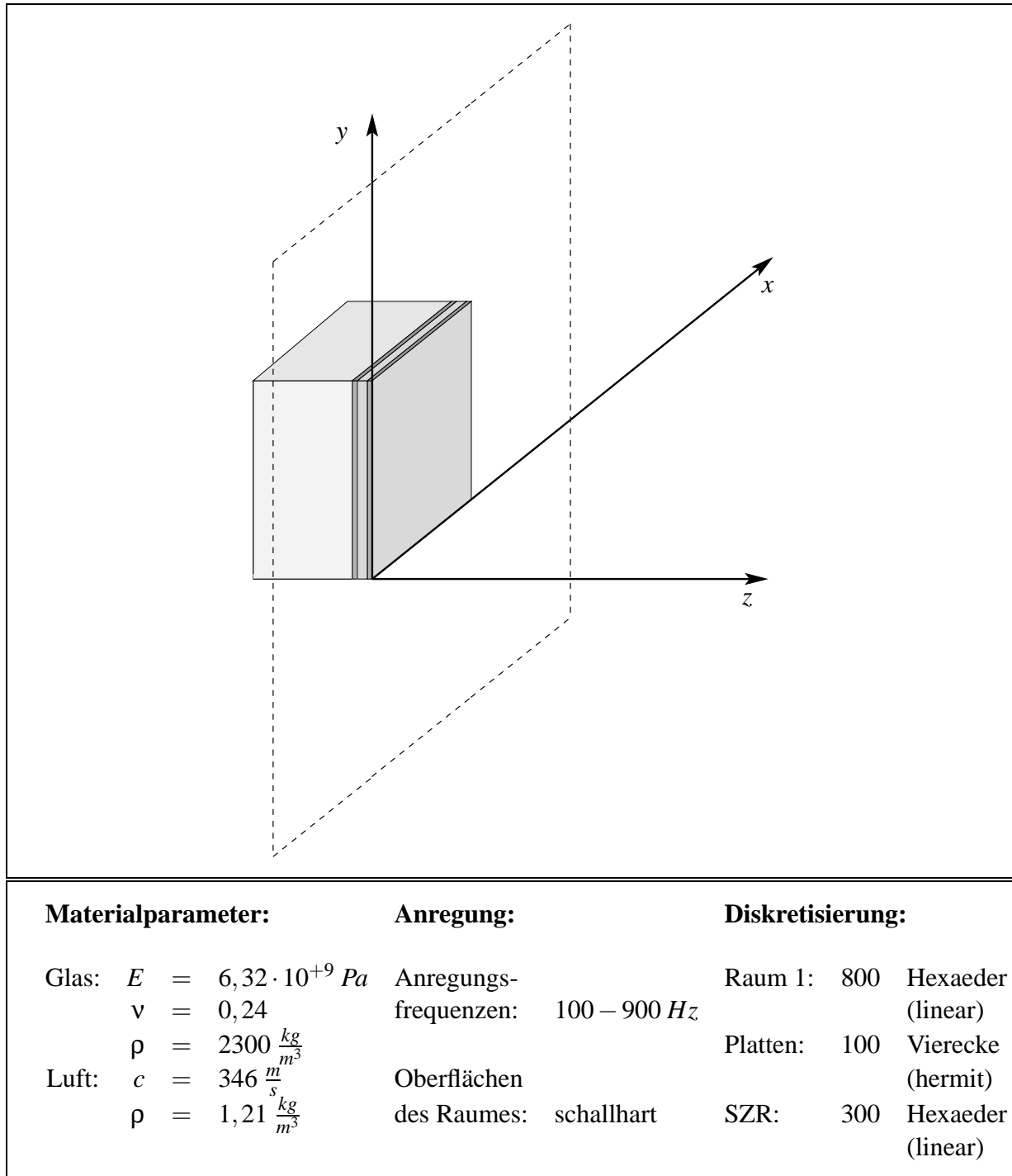


Abbildung 6.1: Systemdaten der Konfiguration: „Abgeschlossener Raum - zweischalige Isolierverglasung - umgebende Luft“ für die Abschnitte 6.1–6.4

geringerer Gesamtglasdicke im untersuchten Frequenzbereich deutlich unter dem Schalldämm-Maß des Fensters mit den dickeren Scheiben.

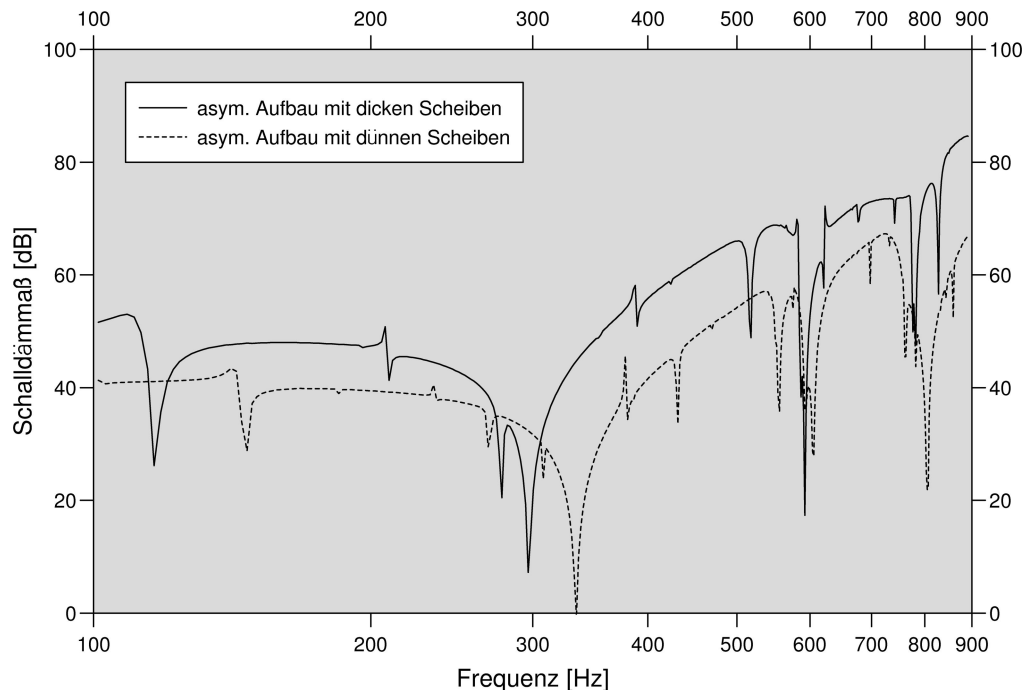


Abbildung 6.2: Dickere Glasscheiben im Vergleich mit dünneren Glasscheiben bei asymmetrischem Aufbau und kleinem Scheibenabstand

Der zweite wesentliche Einflußfaktor auf die Schalldämmung ist der *Scheibenabstand*, der an der Beispielkonfiguration mit dickeren Glasscheiben mit asymmetrischem Aufbau näher untersucht wird. Die Schalldämmkurven für eine solche Isolierverglasung mit einer Breite des Scheibenzwischenraums von 10 bzw. 20 mm werden dafür gegenübergestellt (Abb. 6.3). Die Lage der Masse-Luft-Masse-Grundresonanz verschiebt sich aufgrund der geänderten Geometrie für den größeren Scheibenzwischenraum hin zu niedrigeren Frequenzen. Die Schalldämmkurven nehmen ansonsten qualitativ einen sehr ähnlichen Verlauf an. Das Niveau des Schalldämm-Maßes unterscheidet sich jedoch stark: Die Isolierverglasung mit einem größeren Abstand zwischen den Glasscheiben weist im Vergleich zum Fenster mit kleinerem Scheibenzwischenraum eine wesentlich bessere Schalldämmung auf. Auch diese berechnete Auswirkung einer geometrischen Änderung deckt sich mit den Ausführungen im vorhergehenden Kapitel.

Die Beispiele zur Schalldämmung von Isolierverglasung bei Lärm im Rauminnern schließt ein Vergleich von asymmetrischem mit symmetrischem Scheibenaufbau ab. Als Testkonfiguration für diesen Vergleich werden die dicken Scheiben mit breitem Scheibenzwischenraum gewählt. Für ein Fenster mit symmetrischem Aufbau finden sich in der Schalldämmkurve weniger Resonanzpeaks als bei zwei Scheiben mit asymmetrischem Aufbau (Abb. 6.4). Aufgrund der unterschiedlichen strukturellen Geometrie verschieben sich auch die Masse-Luft-Masse Resonanzen. Das Niveau beider Schalldämmkurven weicht wesentlich weniger voneinander ab, als bei den beiden vorhergehenden Beispielen. Allerdings zeigt sich deutlich die Ver-

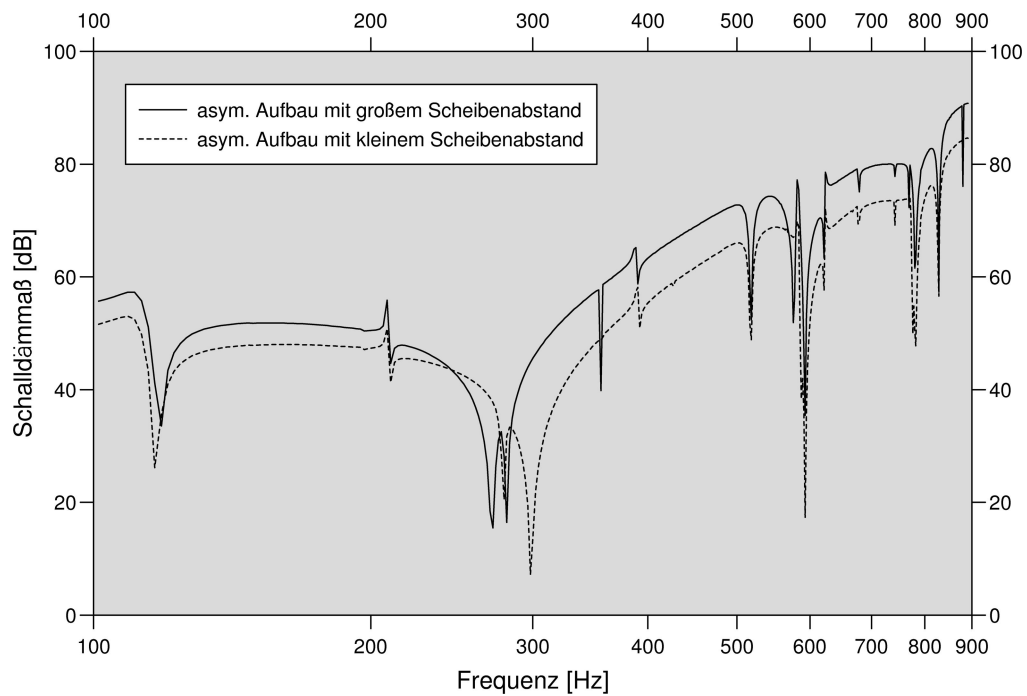


Abbildung 6.3: Kleinerer Scheibenabstand im Vergleich zu größerem Scheibenabstand bei asymmetrischen Aufbau und dicken Scheiben

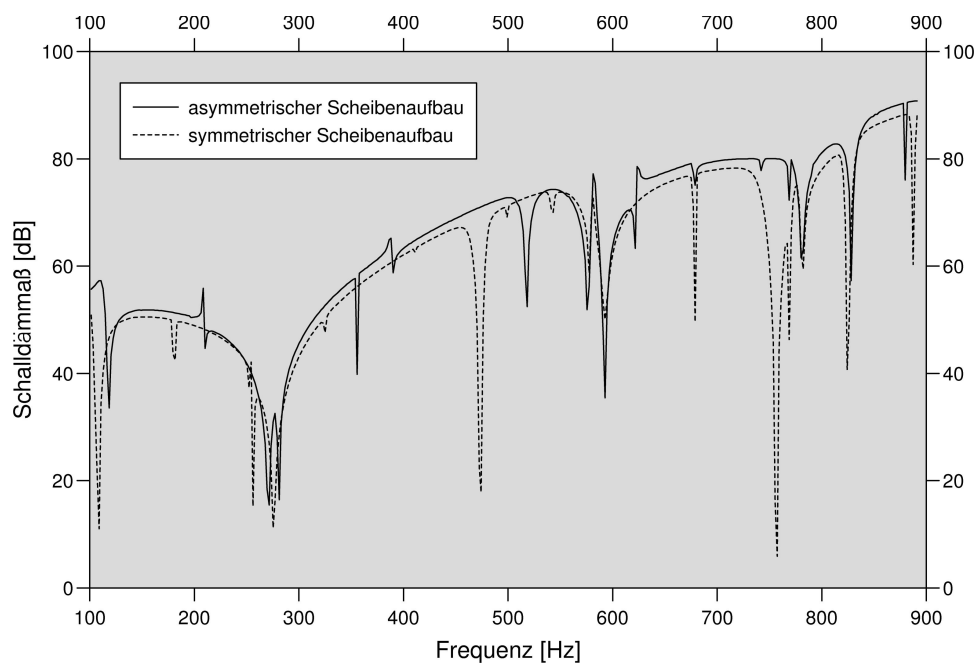


Abbildung 6.4: Symmetrischer Aufbau der Isolierverglasung im Vergleich zu asymmetrischem Aufbau bei großem Scheibenabstand

besserung der Schalldämmung eines Fensters, bei dem die äußere und die raumseitige Glasscheibe unterschiedliche Dicken aufweisen, wie es bereits im Kap. 5.3.2 beschrieben wurde.

## 6.2 Schalldämmung von zweischaliger Isolierverglasung bei Lärm in der Umgebung

Die vorstehenden Beispiele zur Schalldämmung bei Lärm im Rauminnern zeigen den Einfluß von konstruktiven Modifikationen. Der positive Einfluß eines asymmetrischen Scheibenaufbaus wird im Folgenden auch durch die Beispiele bei einer angenommenen Lärmbelastung durch Schallquellen in der Umgebung des Gebäudes deutlich. Die unterschiedlichen Positionen der Quellen vor der Gebäudefront zur Simulation einer spezifischen Lärmsituation sind in Tabelle 6.2 angegeben.

Schalleinfall	x-Koord [m]	y-Koord [m]	z-Koord [m]
normal	0,5	0,5	1,0
streifend	0	0	0,5

Tabelle 6.2: Lage der Schallquellen für die Simulation von äußerem Lärm

Die Abbildung 6.5 zeigt einen Vergleich der Schalldämmung zweier Fenster mit symmetrischem bzw. asymmetrischem Aufbau, wenn die Lärmbelastung durch eine Einzelquelle mittig vor dem Fenster in einem Abstand von 1m gegeben ist. Da in einem gewissen Abstand von einer Einzelquelle das Schallfeld eben ist, kann der Schalleinfall auf die äußere Glasscheibe in diesem Fall als annähernd senkrecht angesehen werden. Im Gegensatz dazu ist in Abbildung 6.6 die Schalldämmkurve für die genannten Konfigurationen aufgetragen, wenn die Anregung der Schallwellen durch eine Schallquelle erzeugt wird, die in einem  $45^\circ$  Winkel zur Mitte des Fensters angeordnet ist, wodurch man von streifendem Schalleinfall auf die äußere Glasplatte sprechen muß. Beide Ergebnisse zeigen, wie dies auch im vorherigen Abschnitt bereits berechnet wurde, daß sich ein symmetrischer Scheibenaufbau negativ auf die Schalldämmung auswirkt. Allerdings sind die Unterschiede im Schalldämmniveau nicht gravierend. Zwischen einer Anregung durch senkrechten und streifenden Schalleinfall zeigen sich allerdings große Unterschiede bezüglich des Schalldämmniveaus, die durch die terzgemittelten Darstellungen in den Abbildungen 6.7 und 6.8 noch näher beleuchtet werden sollen. Auffällig ist daneben, daß im Verlauf der Schalldämmkurven für streifenden Schalleinfall wesentlich mehr Resonanzpeaks zu finden sind. Dies begründet sich dadurch, daß im Gegensatz zum senkrechten Schalleinfall beim streifenden Schalleinfall vermehrt auch die unsymmetrischen Moden der strukturellen Eigenfrequenzen angeregt werden.

Die beiden Diagramme 6.7 und 6.8 zeigen jeweils für den symmetrischen und den asymmetrischen Aufbau einen Vergleich der Schalldämmkurven, die sich bei Lärm im Innern des Raumes oder bei streifendem bzw. senkrechtem Schalleinfall von außen ergeben. Auffällig sind

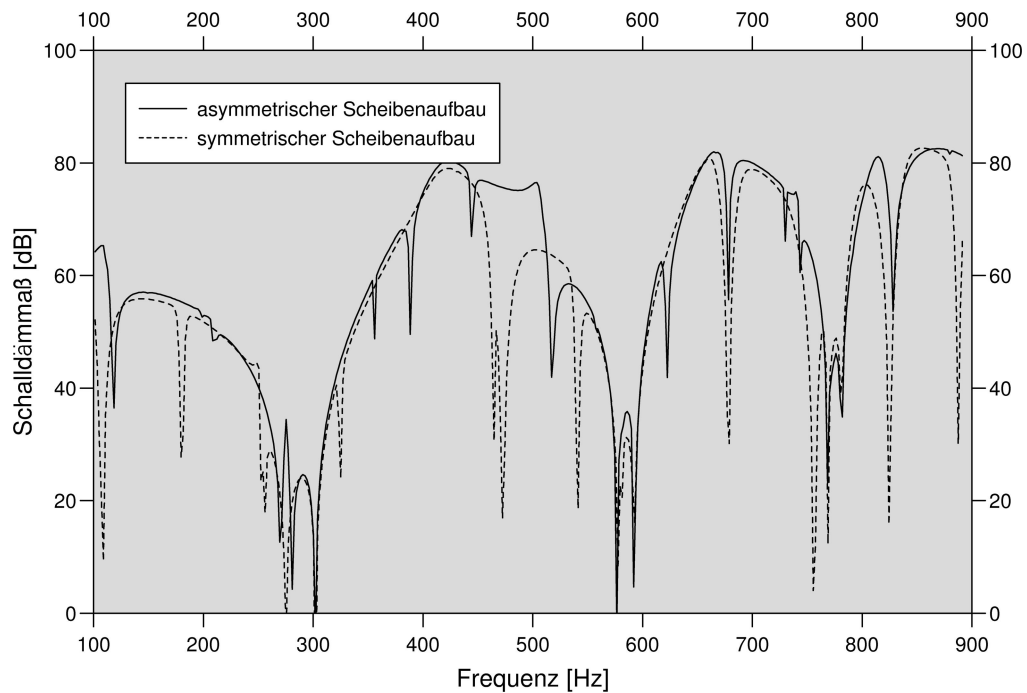


Abbildung 6.5: Vergleich von symmetrischem und asymmetrischem Scheibenaufbau bei senkrechtem Schalleinfall von außen

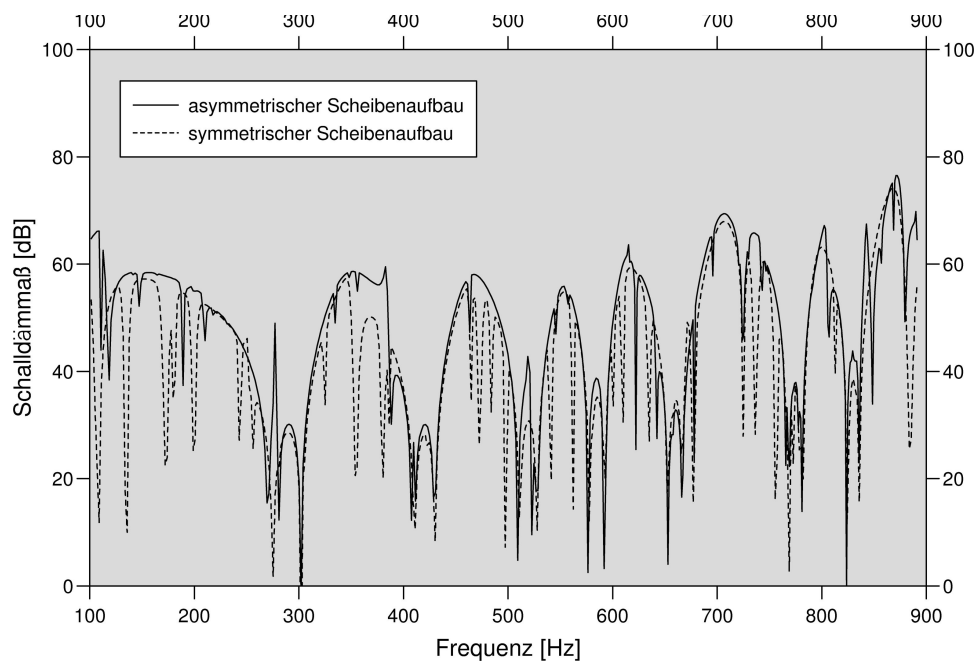


Abbildung 6.6: Vergleich von symmetrischem und asymmetrischem Scheibenaufbau bei streifendem Schalleinfall von außen

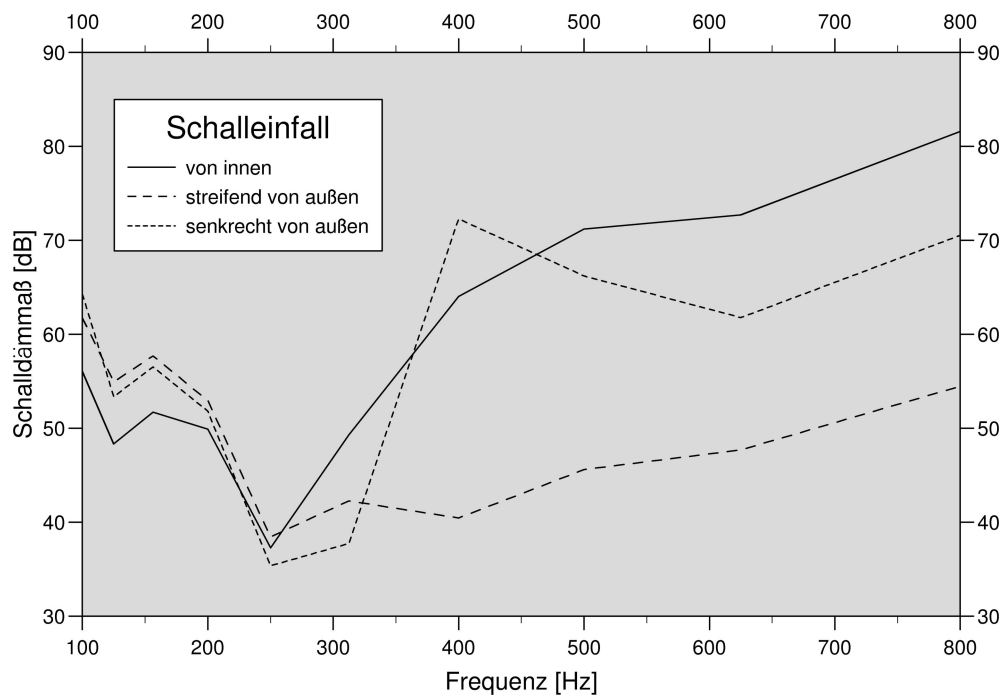


Abbildung 6.7: Schalldämmung von Lärm im Innern im Vergleich zu Außenlärm bei asymmetrischem Fensteraufbau

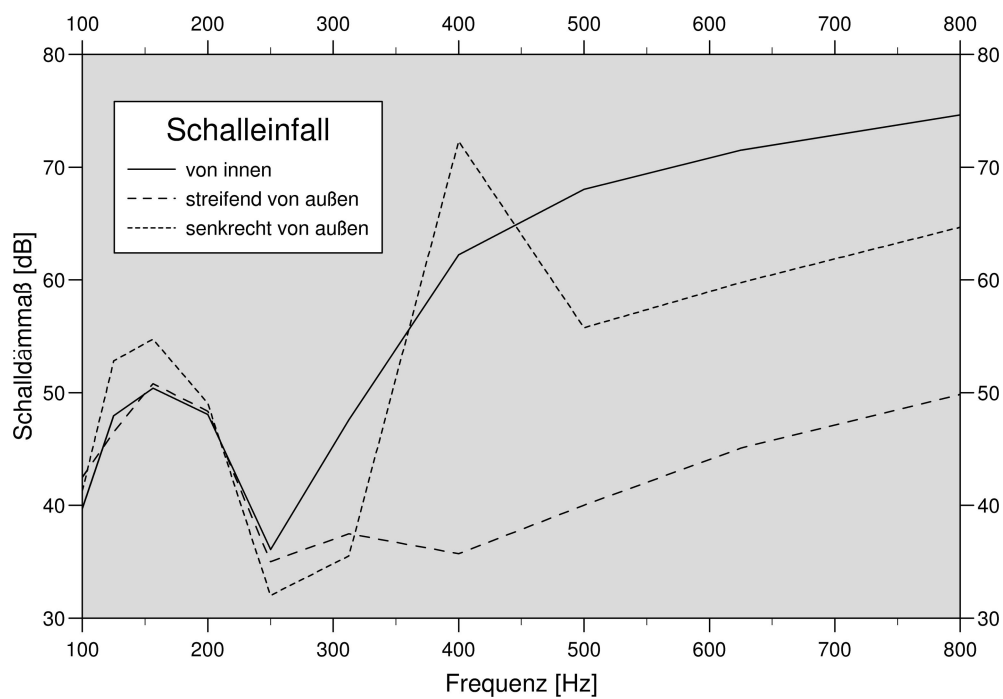


Abbildung 6.8: Schalldämmung von Lärm im Innern im Vergleich zu Außenlärm bei symmetrischem Fensteraufbau



die Unterschiede in der Größe und im Verlauf des Schalldämm-Maßes im untersuchten Frequenzbereich.

Es läßt sich feststellen, daß im Prinzip die Schalldämmung gegenüber senkrechtem Schalleinfall besser ist als gegenüber streifendem Schalleinfall. Die Tatsache, daß die Schalldämmung eines Trennbauteils von der Art und dem Winkel in dieser Form zusammenhängt ist bekannt und kann zum Beispiel in [39] näher nachgelesen werden. Auch dort wird darauf verwiesen, daß die Schalldämmung bei streifendem Schalleinfall stark nachläßt und die Dämmung gegenüber senkrechtem Einfall des Schalls in der Regel am besten ist.

### 6.3 Schalldämmwirkung der Füllung von zweischaliger Isolierverglasung

Die positive Wirkung von zweischaligen Trennbauteilen kann durch eine spezielle Füllung des Hohlraums zwischen den Scheiben mit einem Gas weiter verbessert werden, wie dies im Abschnitt 5.3.2 bereits besprochen wurde. In Abschnitt 6.3.1 wird daher die Schalldämmwirkung eines gasgefüllten Isolierfensters nach Abbildung 6.1 mit Hilfe des vollständig gekoppelten FE/RE-Berechnungsverfahrens simuliert.

Die Wirkung der Gasfüllung auf die Schalldämmung hängt nicht nur von der Art des Gases ab, sondern dürfte sich auch mit abnehmendem Gasdruck im Hohlraum verbessern. Diese Annahme soll anhand der Berechnung eines luftgefüllten, zweischaligen Isolierfensters mit Hilfe des vollständig gekoppelten Berechnungsverfahrens bestätigt werden (vgl. Abschnitt 6.3.2).

Neben gasgefüllten Fenstern finden vermehrt Verglasungen Anwendung, bei denen zwischen den Glasscheiben ein monolithischer Körper aus transparentem bzw. milchigem Material platziert wird. Bei diesem Material handelt es sich um sogenannte *Aerogele*. Auf diese spezielle Füllung des Scheibenzwischenraums wird im Abschnitt 6.3.3 eingegangen.

#### 6.3.1 Wirkung einer Gasfüllung

In den folgenden Beispielrechnungen wird die Schalldämmwirkung eines gasgefüllten Isolierfensters nach Abbildung 6.1 mit Hilfe des vollständig gekoppelten FE/RE-Berechnungsverfahrens simuliert, wobei die Wände von Raum 1 in diesem Fall wiederum als schallhart (mit einem Reflexionsfaktor von +1) angenommen werden. Im Scheibenzwischenraum wird die Impedanz der jeweiligen Gasfüllung als Randbedingung angesetzt (vgl. Gleichung (3.27)). Die Belastung erfolgt durch Lärm im Innern des Gebäudes, allerdings wird im Gegensatz zum Beispiel im Abschnitt 6.1 kein Schalldruck an der fensterabgewandten Stirnfläche des Raums vorgegeben, sondern es erfolgt dort eine Anregung durch Schallquellen ( $1 \frac{N}{m^2}$ ).

Die Materialparameter der verwendeten Gasfüllungen sind in Tabelle 6.3 zusammengefaßt. Neben einer Berechnung von einer luftgefüllten Isolierverglasung werden Rechnungen mit einem im Vergleich zu Luft leichteren - einem Leichtgas - und im Vergleich schwereren Gas - einem Schwergas - durchgeführt. Als Leichtgas wurde Wasserstoff gewählt, dessen Schallgeschwindigkeit ca. 4 x größer ist als die von Luft. Schwefelhexafluorid ( $SF_6$ ) ist ein im Vergleich

	Schallgeschwindigkeit $\left[\frac{m}{s}\right]$	Dichte $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$
Wasserstoff	1400	0,09
Luft	346	1,2
Schwefelhexafluorid	130	6,1

Tabelle 6.3: Materialparameter der unterschiedlichen Gasfüllungen

zu Luft wesentlich schwereres Gas, das damit auch eine geringere Schallgeschwindigkeit aufweist als Luft.

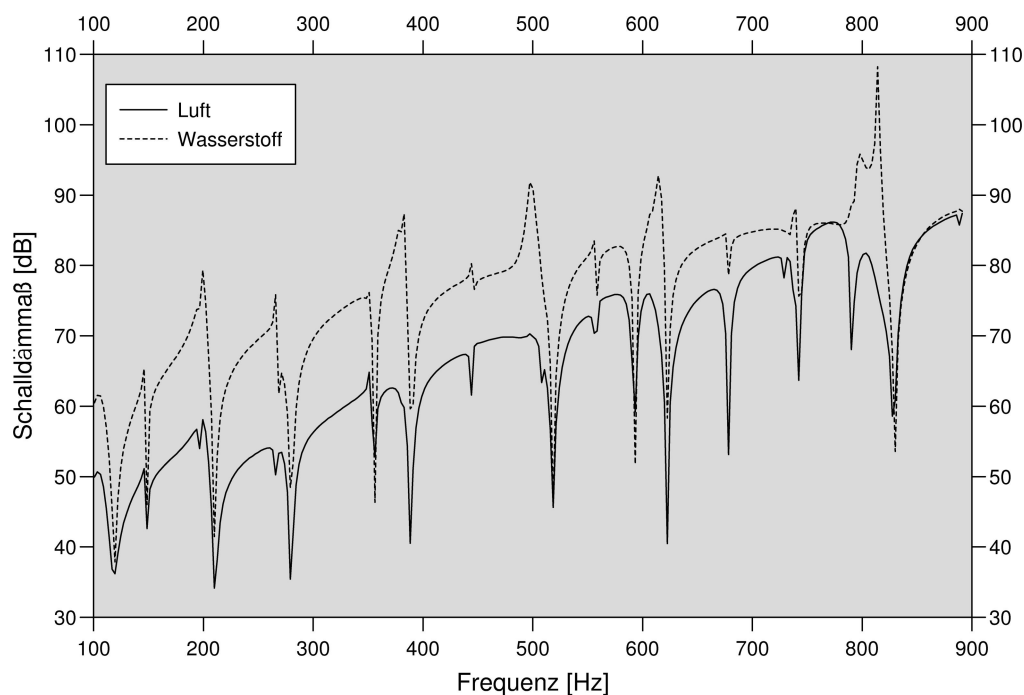


Abbildung 6.9: Vergleich des Schalldämm-Maßes von Zweifachverglasung mit Luftfüllung gegenüber einer leichteren Gasfüllung

Zum Vergleich der Schalldämmwirkung der Gasfüllung sind in den Abbildungen 6.9 bzw. 6.10 die Schalldämm-Maße des Zweifachfensters mit Leichtgas- bzw. Schwergasfüllung einem Fenster mit Luftfüllung gegenübergestellt. Ein deutlich größeres Schalldämm-Maß des Fensters mit Wasserstoff belegt, daß sich die Schalldämmung durch eine Füllung mit einem leichteren Gas verbessert. Die Ursache ist die wesentlich größere Schallgeschwindigkeit von Wasserstoff im Vergleich zu Luft (vgl. Abschnitt 5.3.2). Mit der Schallgeschwindigkeit ist auch die Wellenlänge von Wasserstoff wesentlich größer. Damit ist das Verhältnis zur Biegewellenlänge der Glasscheiben immer größer als bei Luft, weshalb das von den Glasscheiben abgestrahlte Nahfeld in den gasgefüllten Hohlraum bei der Leichtgasfüllung sehr schnell abklingt.

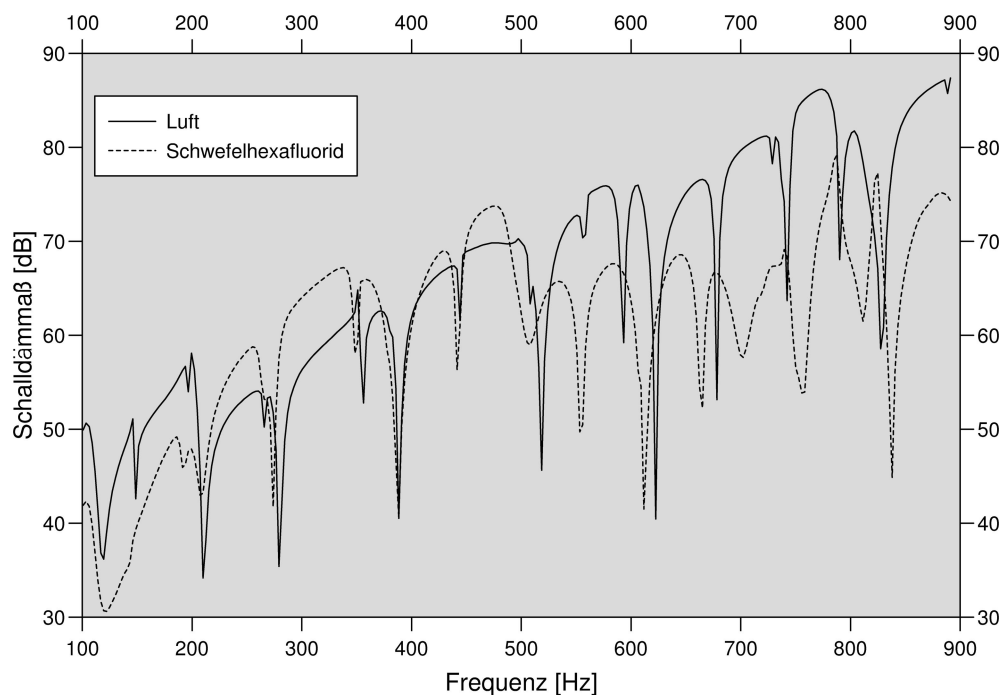


Abbildung 6.10: Vergleich des Schalldämm-Maßes von Zweifachverglasung mit Luftfüllung gegenüber einer schwereren Gasfüllung

Die Schalldämmkurve für ein Fenster mit Schwefelhexafluoridfüllung (s. Abbildung 6.10) zeigt die für ein schwereres Gas charakteristischen Eigenschaften: Die Peaks sind bei identischer Frequenzschrittweite bei  $SF_6$ -Füllung im Vergleich zur Luft- bzw. Wasserstofffüllung am geringsten ausgeprägt, da die Resonanzschwingungen des Hohlraums aufgrund der geringeren Schallgeschwindigkeit weniger stark ausgeprägt sind (vgl. Abschnitt 5.3.2). Allerdings liegt die Schalldämmkurve nicht im gesamten Frequenzbereich über der entsprechenden Kurve für ein luftgefülltes Fenster: Zwischen 450 und 600 Hz verschlechtert sich die Schalldämmung. Dies läßt sich mit der Lage der Grenzfrequenzen von den beiden Fensterscheiben begründen. Die Grenzfrequenz liegt bei Schwefelhexafluorid für die dickere Glasscheibe bei 475 Hz und für die dünnere Glasscheibe bei 576 Hz. Unterhalb dieses Frequenzbereichs wird von den schwingenden Fensterscheiben nur ein Nahfeld abgestrahlt, die Schalldämmung ist damit sehr gut. Oberhalb der Grenzfrequenzen kommt es zur Abstrahlung des Fernfeldes und damit zu einer Verschlechterung der Schalldämmung.

Ein Vergleich der terzgemittelten Schalldämm-Maße ist in Abbildung 6.11 dargestellt. Es verdeutlicht sich, daß durch eine Gasfüllung die Schalldämmung einer zweischaligen Isolierverglasung verbessert werden kann, wobei daß Niveau vor allem durch eine Füllung mit einem im Vergleich zu Luft leichteren Gas angehoben wird. Für den Fall, daß vor allem die Hohlraumfrequenzen bedämpft werden sollen, ist eine Füllung mit einem schwereren Gas empfehlenswert.

Mit der folgenden Beispielberechnung wird die Abhängigkeit der Schalldämmung vom Schalleinfallswinkel näher untersucht. Die Tatsache, daß sich die Dämmung bei zunehmend streifendem Schalleinfall verschlechtert, wurde bereits im vorherigen Abschnitt verdeutlicht.

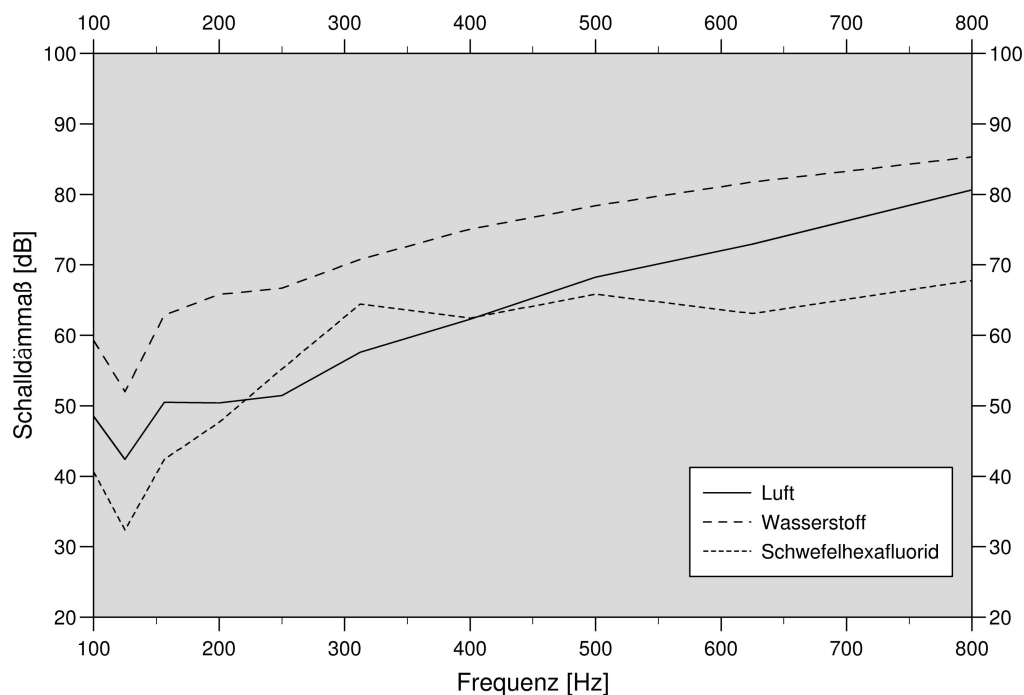


Abbildung 6.11: Vergleich der terzgemittelten Schalldämm-Maße bei unterschiedlichen Gasfüllungen im Scheibenzwischenraum

Allerdings ergibt sich bei der Füllung mit einem Leicht- oder einem Schwergas die folgende Besonderheit: Der Grad der Abhängigkeit der Schalldämmung vom Schalleinfallswinkel ändert sich mit der Dichte des Füllgases. Für Gase hoher Dichte verschlechtert sich die Schalltransmission mit zunehmendem Einfallswinkel nur sehr wenig, für leichte Gase zeigt sich eine sehr große Abhängigkeit vom Schalleinfallswinkel [36].

In Abbildung 6.12 sind die Schalldämmkurven für drei unterschiedliche Gasfüllungen bei streifendem Schalleinfall (unter  $45^\circ$ ) dargestellt. Es zeigt sich erwartungsgemäß, daß die Schalldämmung bei allen drei Gasen für den streifenden Schalleinfall im Vergleich zu den Schalldämmkurven in Abbildung 6.11 schlechter ist. Allerdings verschlechtert sich die Schalldämmung für die drei Gase nicht im gleichen Maße. Die Differenz des Schalldämm-Maßes ist bei Wasserstoff am größten und bei Schwefelhexafluorid am geringsten. Dazwischen ist die Veränderung der Schalldämmung infolge streifenden Schalleinfalls beim Fenster mit Luftfüllung einzuordnen. Die Abhängigkeiten vom Schalleinfallswinkel variieren damit auch in diesem Berechnungsbeispiel für Gase unterschiedlicher Dichte stark.

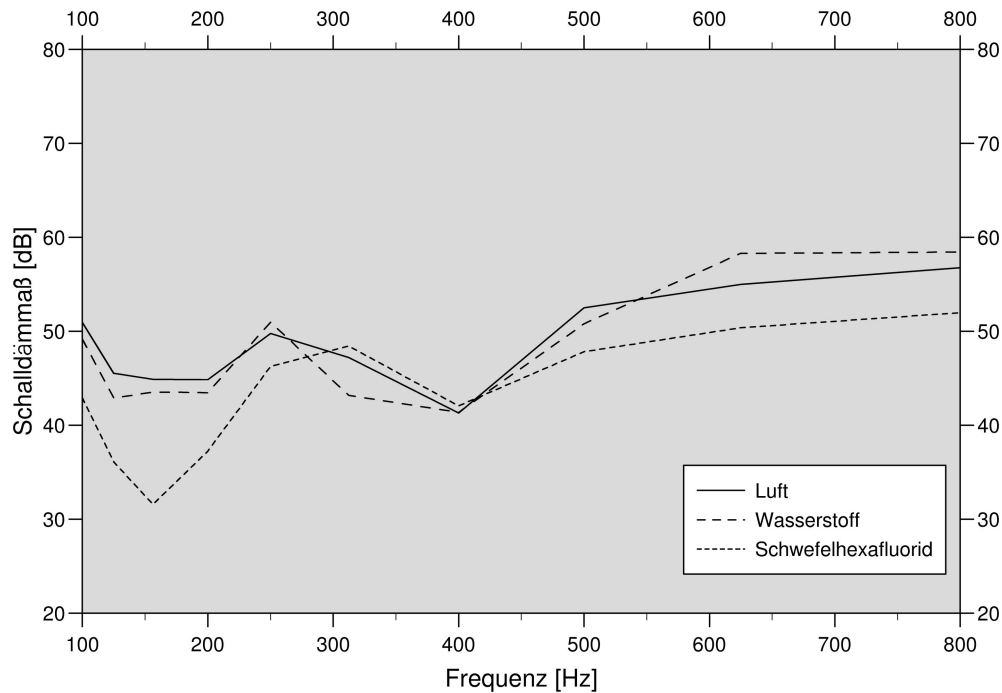


Abbildung 6.12: Vergleich der terzgemittelten Schalldämm-Maßen bei unterschiedlichen Gasfüllungen im Scheibenzwischenraum und streifendem Schalleinfall

### 6.3.2 Wirkung einer Gasfüllung niederen Drucks

Mit abnehmendem Gasdruck im Hohlraum ändern sich die Dichte der Luft. Daneben ist eine Änderung der Schallgeschwindigkeit zu erwarten. Die Dichte kann durch die Beziehung

$$\rho = \frac{p}{R \cdot T} \quad (6.1)$$

für beliebige Gasdrücke  $p$  in Abhängigkeit von der Gaskonstanten  $R$  und der Temperatur  $T$  des Gases berechnet werden. Die Schallgeschwindigkeit ist nach Gleichung (2.2) ebenfalls vom Gasdruck und daneben vom Isentropenkoeffizienten  $\kappa$  und der Gasdichte  $\rho$  abhängig. Ersetzt man in dieser Gleichung die Gasdichte durch den Ausdruck (6.1), so ergibt sich die folgende Beziehung für die Schallgeschwindigkeit im Gas:

$$c = \sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}} = \sqrt{\kappa \cdot R \cdot T} \quad (6.2)$$

Da die Gaskonstante  $R$  sowohl von der Temperatur als auch vom Gasdruck unabhängig ist, kann eine Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit vom Gasdruck nur bestehen, wenn diese auch beim Isentropenexponent vorhanden ist. Zwar ist der Isentropenkoeffizient eine Funktion von Temperatur und Gasdruck, man kann aber bei der vereinfachenden Annahme eines idealen Gases die Druckabhängigkeit vernachlässigen [11]. Er läßt sich dann als Quotient aus der isobaren spezifischen Wärmekapazität  $c_p$  und der isochoren spezifischen Wärmekapazität  $c_v$  bzw.

unter Berücksichtigung der Definition der Gaskonstante als

$$\kappa(T) = \frac{c_p(T)}{c_v(T)} = \frac{c_p(T)}{c_p(T) - R} \quad (6.3)$$

berechnen.

Damit kann davon ausgegangen werden, daß eine Änderung des Gasdrucks in der Luftfüllung des Hohlraums nur eine Änderung der Gasdichte zur Folge hat. Die Schallgeschwindigkeit bleibt bei Annahme einer verlustlosen Schallausbreitung in der Luft unverändert.

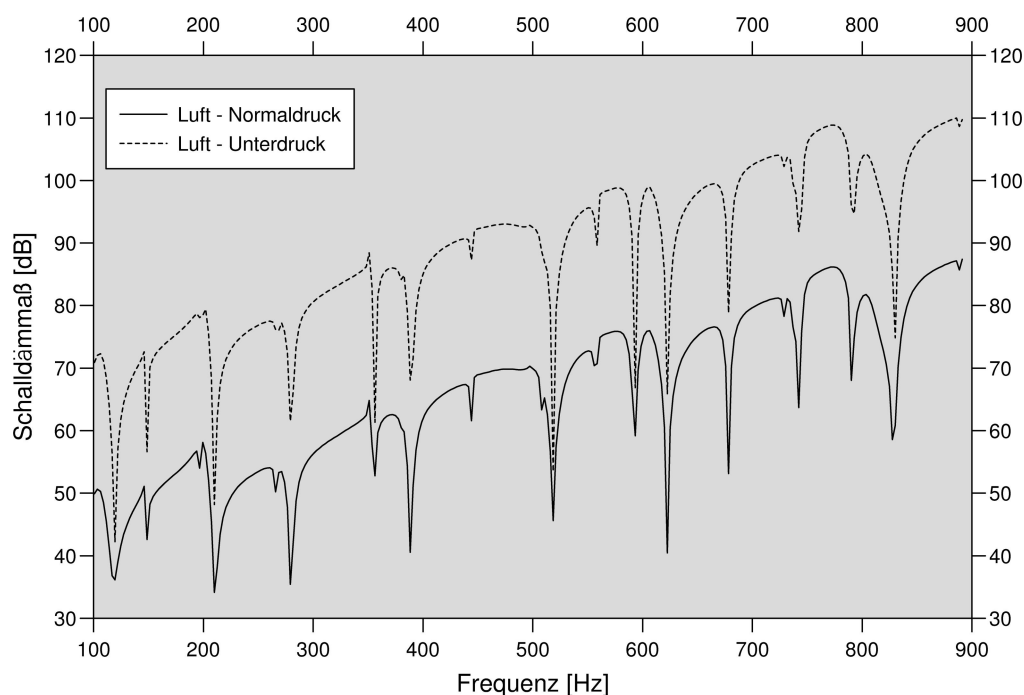


Abbildung 6.13: Vergleich des Schalldämm-Maßes von Zweifachverglasungen mit Luftfüllungen unterschiedlichen Drucks

Die Abbildung 6.13 zeigt einen Vergleich der Schalldämmkurven für ein Fenster mit Luftfüllung unter Normbedingungen (  $20^{\circ}\text{C}$ ;  $1013\text{hPa}$  ) und für ein Fenster mit Unterdruckbedingungen im Hohlraum. Der Gasdruck wird bei der zweiten Berechnung bei gleicher Temperatur mit  $75,6\text{hPa}$  angesetzt, so daß sich nach Gleichung (6.1) eine Gasdichte von  $0,09\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$  ergibt. Der Verlauf der Kurven ist prinzipiell gleich, das Niveau der Schalldämmung unterscheidet sich jedoch stark. Sehr deutlich wird durch die Berechnung, daß durch den geringeren Druck im Hohlraum die Kopplung zwischen den Einzelschalen des Bauteils verringert und damit die Schalldämmwirkung entscheidend verbessert wird.

Bei der Realisierung derartiger Isolierfenster, bei denen die Füllung einen niederen Gasdruck aufweist als die Atmosphäre, muß allerdings gerade im Hinblick auf die Dauerhaltbarkeit besonderen Wert auf die Vermeidung von Diffusionsverlusten durch den Druckunterschied gelegt werden. Dies gilt insbesondere für Spezialverglasungen mit einem evakuierten Scheibenzwischenraum.

### 6.3.3 Wirkung einer Aerogelfüllung

Aerogele sind hochporöse und leichte Materialien, die sich aus Gelen herstellen lassen, wenn ihnen unter Druck und bei hohen Temperaturen die Flüssigkeit entzogen wird [44]. Sie haben aufgrund ihrer porösen Struktur eine sehr große Isolationsfähigkeit gegenüber Wärme, z.B. leiten Quarz-Aerogele ungefähr hundertmal schlechter als kompaktes Quarzglas. Damit zeichnen sich diese besonders für die Verwendung als sogenannte *Transparente Wärmedämmung* aus [45].

Obwohl diese transparente Dämmung derzeit fast ausschließlich unter wärmetechnischen Gesichtspunkten diskutiert wird, erscheinen Studien unter schallschutztechnischen Aspekten lohnenswert, da Aerogele interessante akustische Materialeigenschaften aufweisen [69]. So ist zum Beispiel die Schallgeschwindigkeit in Aerogelen sehr gering, sie beträgt bei  $\text{SiO}_2$ -Aerogel etwa  $100 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  [51]. Da daneben auch die Dichte sehr gering ist, weisen Aerogele niedrige Impedanzen auf.

Bei Aerogelen handelt es sich um ein poro-elastisches Material, das durch die Biotsche Theorie beschrieben werden kann [42]. Dennoch soll hier, um die tendenzielle Wirkung einer Aerogelfüllung an einem Beispiel zu verdeutlichen, diese durch ein Fluid beschrieben werden, obwohl die Helmholtzgleichung das spezifische Materialverhalten nur unzureichend abbilden kann.

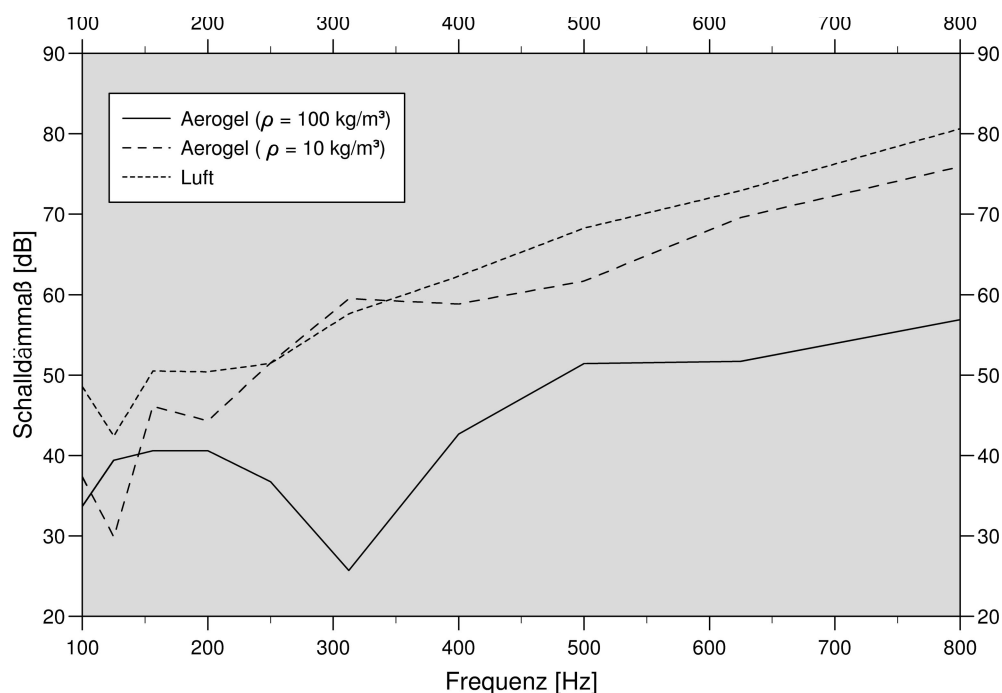


Abbildung 6.14: Vergleich des terzgemittelten Schalldämm-Maßes von Zweifachverglasung mit Luftfüllung gegenüber Füllungen aus Aerogel

Die Abbildung 6.14 zeigt die terzgemittelten Schalldämmkurven für zwei verschiedene Aerogelfüllungen im Vergleich zur luftgefüllten Isolierverglasung. Für die beiden Aerogelfül-

lungen wird eine Schallgeschwindigkeit von  $100 \frac{m}{s}$  angenommen. Die Dichte  $\rho$  der ersten Füllung beträgt  $100 \frac{kg}{m^3}$ , die der zweiten  $10 \frac{kg}{m^3}$ . Bei den Berechnungen gehen für den Raum schallharte Randbedingungen und für den Scheibenzwischenraum die Wandimpedanzen von Luft bzw. den beiden Aerogelen ein (vgl. Gleichung (3.27)).

Es ergibt sich für diese Näherungsrechnung, daß zwar bei einer Aerogelfüllung mit einer Dichte von  $100 \frac{kg}{m^3}$  die Schalldämmung schlechter ist als bei einer Luftfüllung, allerdings können für eine sehr leichte Aerogelfüllung ungefähr gleiche Schalldämmwerte erreicht werden wie durch eine Luftfüllung. Dies ist bei einem monolithischem Körper bemerkenswert, zudem die wärmetechnischen Dämmeigenschaften dieser Verglasungen mit Aerogelkern hervorragend sind. In Zukunft werden sich daher neue konstruktive Möglichkeiten vor allem auch im Zusammenhang mit der Gestaltung von Fassaden eröffnen.

## 6.4 Einfluß der Plattenlagerung auf die Schalldämmwirkung

Den Abschluß der Untersuchungen an der ersten Modellkonfiguration soll ein Vergleich der Schalldämmwirkung des Isolierfensters bei Annahme unterschiedlicher Lagerungsbedingungen bilden. In Abbildung 6.15 werden die Schalldämmkurven für allseitig eingespannte und allseitig gelenkig gelagerte Glasscheiben sowie bei gelenkiger bzw. eingespannter Lagerung von jeweils zwei gegenüberliegenden Kanten der Platten (g - c - g - c) verglichen

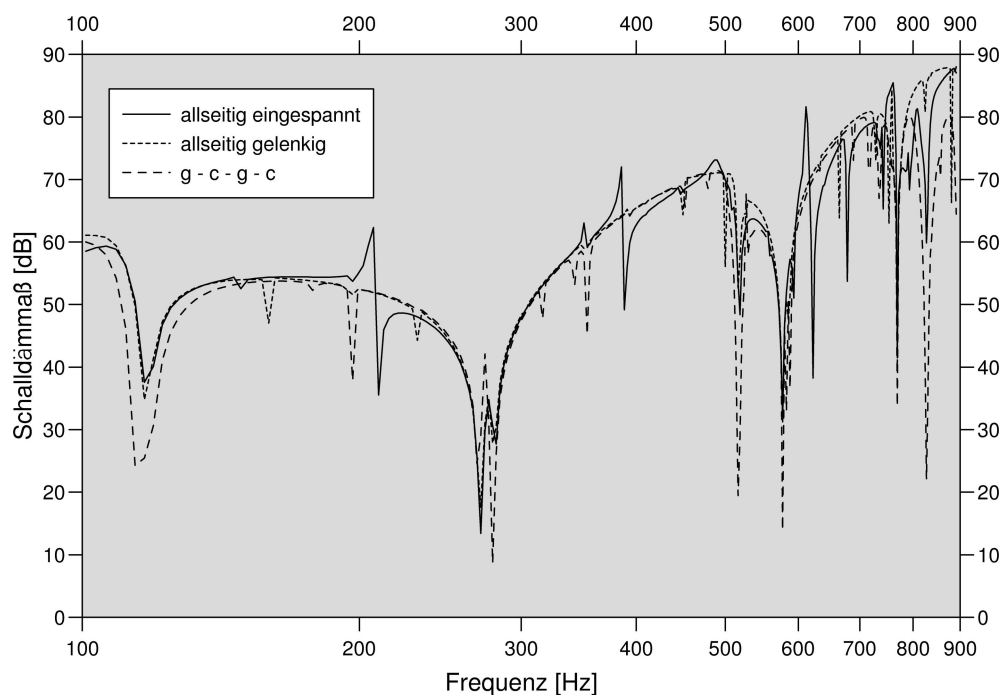


Abbildung 6.15: Vergleich des Schalldämm-Maßes von unterschiedlich gelagerten Zweifachverglasungen



Es zeigt sich jeweils ein annähernd gleiches Schalldämmniveau, vor allem im unteren und mittleren Frequenzbereich. Die Lagerungsbedingungen wirken sich, wie dies auch zu erwarten ist, fast ausschließlich auf die Lage der Resonanzpeaks bei den strukturellen Eigenfrequenzen aus.

## 6.5 Einfluß der Raumgeometrie auf die Schalldämmwirkung

Die bisherigen Ausführungen und Anwendungsbeispiele beziehen sich auf die Wirkung der konstruktiven Gestaltung des Trennbauteils. Allerdings hat neben den Einzelschalen und dem Hohlraum die Geometrie des Zimmers, das durch das Fenster von der Umgebung getrennt wird, einen nicht vernachlässigbaren Einfluß auf die akustische Situation. Dies soll anhand des folgenden Beispiels verdeutlicht werden. Dabei wird das Schalldämm-Maß eines Isolierfensters für unterschiedlich tiefe Räume berechnet. Die Raumgeometrien der Beispielrechnungen können Tabelle 6.4 entnommen werden.

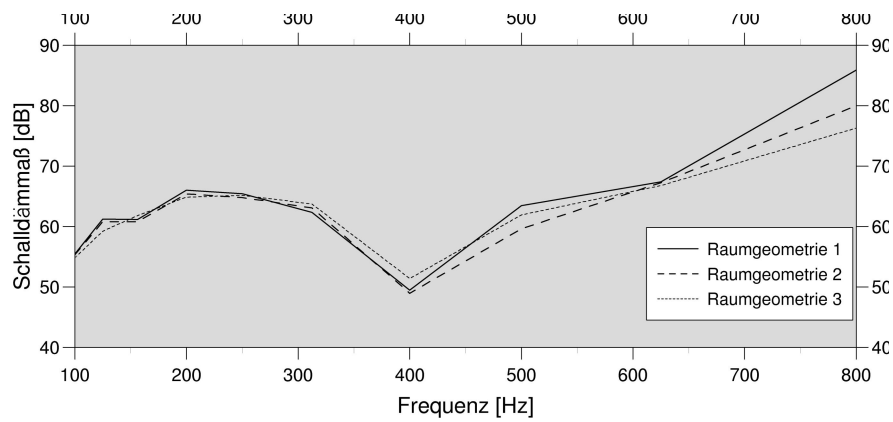
	Raum (BxHxT) [ $m^3$ ]	SZR (BxHxT) [ $m^3$ ]
Beispiel 1	1,0 x 0,5 x 0,5	1,0 x 0,5 x 0,02
Beispiel 2	1,0 x 0,5 x 1,0	1,0 x 0,5 x 0,02
Beispiel 3	1,0 x 0,5 x 0,7	1,0 x 0,5 x 0,02

Tabelle 6.4: Raumabmessungen

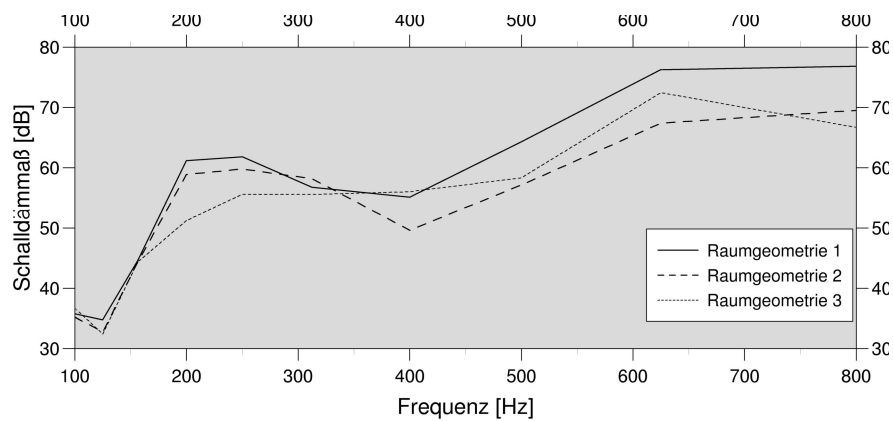
Zunächst werden die Schalldämmkurven der drei Isolierfenster, die wie beschrieben jeweils unterschiedliche Einbausituationen aufweisen, verglichen. So sind in Abbildung 6.16 die terzgemittelten Schalldämm-Maße der gekoppelten FE/RE-Berechnung bei Anregung durch Quellen gleicher Intensität an der fensterabgewandten Stirnfläche des Raumes (analog zu Abschnitt 6.3.1) dargestellt. Die Schallquellen sind damit bei den drei unterschiedlich tiefen Räumen auch jeweils in einem anderen Abstand (0,5m; 0,7m; 1m) vom Fenster entfernt platziert.

Die Diagramme 6.16(a)–6.16(c) zeigen die Schalldämmkurven für die drei Raumgeometrien bei schallweicher, schallharter und absorbierender Beschaffenheit der Wände des Scheibenzwischenraums. Die letztere Eigenschaft findet durch die Berücksichtigung der Impedanz von Luft an den Begrenzungsflächen Eingang in die Berechnung. Für die Bewertung der Unterschiede im Schalldämmverhalten aufgrund unterschiedlicher Randbedingungen für die einzelnen Geometrien sei auf Abschnitt 6.7 verwiesen.

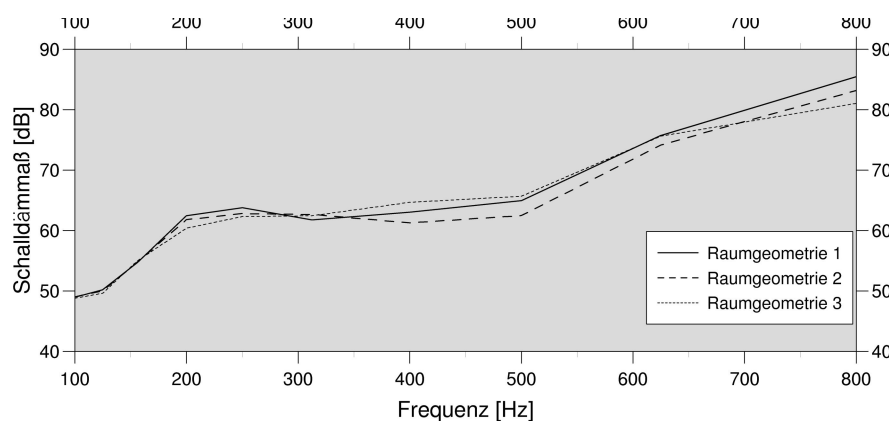
Es wird deutlich, daß der Verlauf des Schalldämm-Maßes nicht unabhängig von der Geometrie des Raumes ist, in den das Fenster eingebaut wird. Zwar stimmen die Schalldämmkurven für den unteren Frequenzbereich gut überein, allerdings kommt es im Bereich höherer Frequenzen zu Unterschieden im Schalldämmniveau. Dabei sind die Abweichungen für die unterschiedlichen Geometrien erheblich und können bis zu 10 dB betragen. Allerdings läßt sich keine exakte Aussage bezüglich einer schalltechnisch guten oder schlechten Raumgeometrie



(a) schallweiche Randbedingungen im SZR



(b) schallharte Randbedingungen im SZR

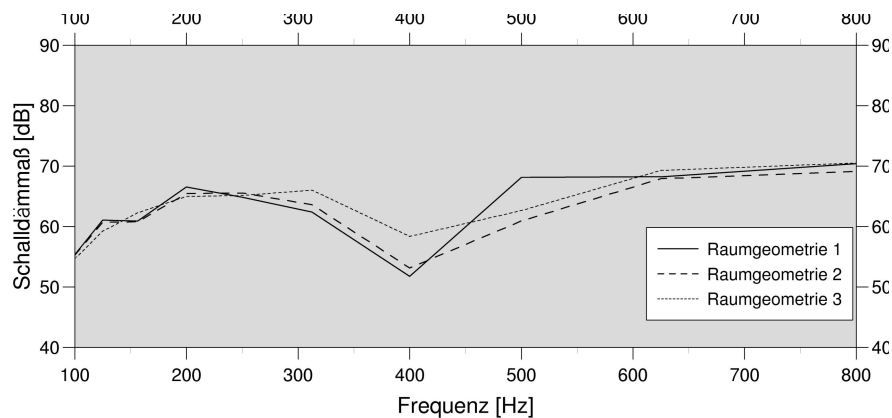


(c) absorbierende Randbedingungen im SZR

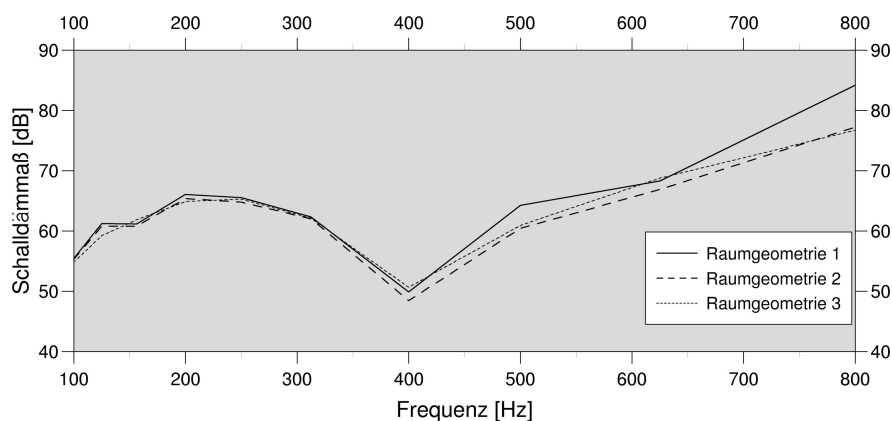
Abbildung 6.16: Vergleich der terzgemittelten Schalldämm-Maße bei unterschiedlichen Raumgeometrien und Anregung durch Quellen gleicher Intensität

machen, da sich weder für alle Wandbeschaffenheiten noch über den gesamten Frequenzbereich eine Geometrie tendenziell als besonders günstig ausweist. Jedoch läßt sich feststellen, daß in der Regel das Schalldämm-Maß bei kleineren Räumen größer ist als bei größeren, da aufgrund der vermehrten Reflexionen an den Wänden eines kleineren Raumes und den resultierenden Überlagerungen dort ein höherer Schallpegel zu erwarten ist.

Ähnlich signifikante Unterschiede beim Niveau der Schalldämmkurven zeigen sich für zwei weitere Berechnungsbeispiele: In Abbildung 6.17 sind die terzgemittelten Schalldämm-Maße der drei Raumgeometrien für verschiedene Arten der Schallanregung gegenübergestellt. Die Bewertung der Abweichungen aufgrund unterschiedlicher Anregung erfolgt wiederum in einem separaten Abschnitt (vgl. Abschn. 6.6).



(a) Quellen unterschiedlicher Intensität



(b) Schalldruck-Randbedingungen

Abbildung 6.17: Vergleich der terzgemittelten Schalldämm-Maße bei unterschiedlichen Raumgeometrien und schallweichen Oberflächen im SZR

Die Schalldämmwirkung eines Trennbauteils ist damit ganz offensichtlich abhängig von der geometrischen Situation im eingebauten Zustand und sollte im Prinzip für jede der im einzelnen vorhandenen Situationen untersucht werden. Die tatsächliche Schalldämmung kann dabei im Vergleich zu den unter normierten Prüfbedingungen festgestellten Werten signifikant abweichen, wobei sowohl eine tatsächlich bessere als auch eine schlechtere Dämmung nicht auszuschließen ist. Da Messungen für beliebige bauliche Ausführungen zu aufwendig sind und außerdem immer nur nach Fertigstellung des Baus realisiert werden können, ist eine rechnerische Simulation wie sie in dieser Arbeit vorgestellt wurde, die einzige praktikable Möglichkeit hinsichtlich eines optimalen schallschutztechnischen Entwurfs.

## 6.6 Einfluß der Anregung auf die Schalldämmwirkung

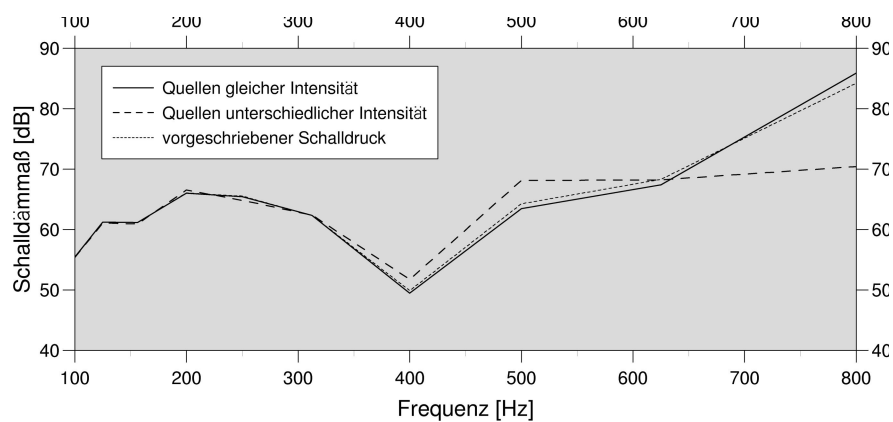
In den Abschnitten 6.1 und 6.2 wurden bereits Unterschiede im Schalldämmverhalten von zweifachverglasten Isolierfenstern aufgrund von Lärm im Innern bzw. außerhalb des Gebäudes diskutiert. Daß auch die Art der Schallanregung im Gebäude die Schalldämmwirkung des Fensters beeinflusst, wird anhand des folgenden Beispiels aufgezeigt.

Die Anregung von Schallwellen im Innern des Gebäudes erfolgt hier auf drei verschiedene Arten, wobei immer die Knoten an der fensterabgewandten Stirnfläche des Raumes belastet bzw. angeregt werden. So wird dort ein konstanter Schalldruck von  $1 \frac{N}{m^2}$  vorgeschrieben oder es werden dort entweder identische Schallquellen ( $0,001 \frac{N}{m^3}$ ) oder unterschiedliche Schallquellen ( $0,001 \frac{N}{m^3} - 0,05 \frac{N}{m^3}$ ) platziert. Die terzgemittelten Ergebnisse der gekoppelten FE/RE-Berechnung mit schallharten Raumwänden und schallweichen Randbedingungen im Scheibenzwischenraum sind in Abbildung 6.18 dargestellt.

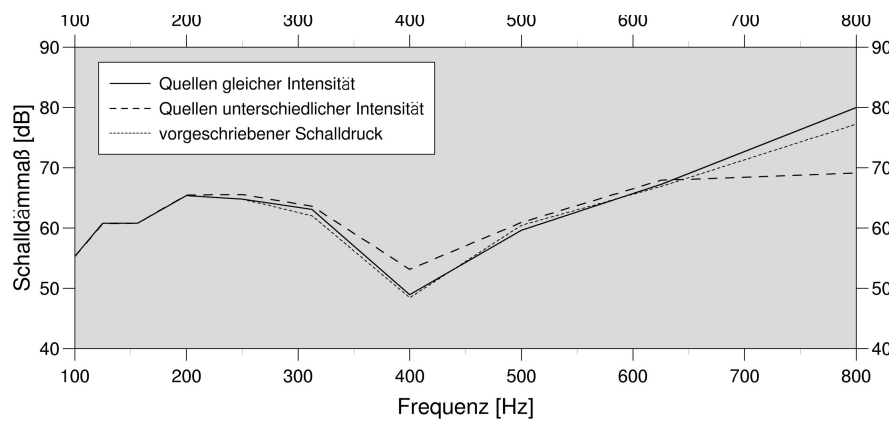
Es zeigt sich, daß das Schalldämm-Maß für die unterschiedlichen Anregungen im unteren Frequenzbereich in jedem Fall sehr gut übereinstimmen. Weiterhin stimmen für alle drei Raumgeometrien der Verlauf und auch das Niveau des Schalldämm-Maßes bei einer Berechnung mit vorgeschriebenem Schalldruck bzw. Schallquellen gleicher Intensität auch für mittlere und höhere Frequenzen gut überein. Die Ergebnisse der Berechnung mit Schallquellen unterschiedlicher Intensität weichen jedoch von den Ergebnissen für die Belastung gleicher Größe bzw. Anregung gleicher Intensität bei allen drei Raumgeometrien im hohen Frequenzbereich ab: Da nach dem Einbruch der Schalldämmkurven bei 400 Hz das Schalldämm-Maß für diese Anregung weniger stark ansteigt als bei den anderen beiden, beträgt der Unterschied bei 800 Hz zwischen 8 und 15 dB.

## 6.7 Einfluß der Randbedingungen im Scheibenzwischenraum auf die Schalldämmwirkung

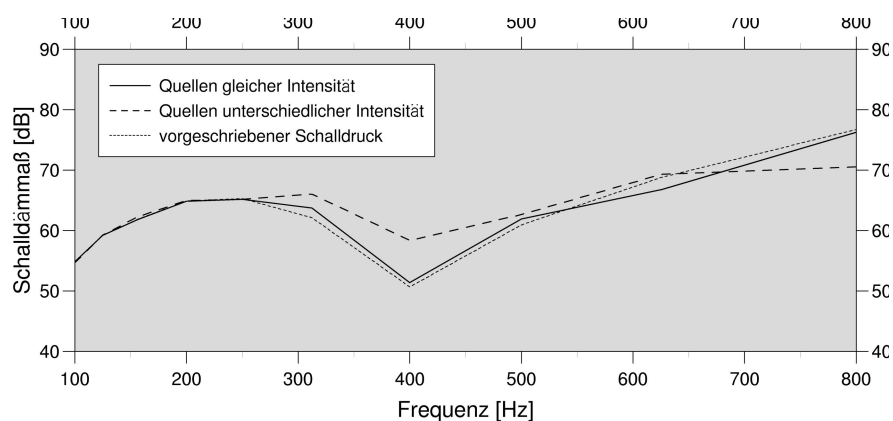
An den Wänden des Scheibenzwischenraums werden die Schallwellen reflektiert, wobei die Beschaffenheit der Oberfläche für die Größe der Absorption bzw. Reflexion verantwortlich ist (vgl. Abschnitt 2.3.3). Eine Änderung der Oberflächenbeschaffenheit wird sich auch auf das



(a) Raumgeometrie 1



(b) Raumgeometrie 2



(c) Raumgeometrie 3

Abbildung 6.18: Vergleich der terzgemittelten Schalldämm-Maße bei unterschiedlichen Anregungen

Schallfeld im Scheibenzwischenraum und damit auch auf das gesamte Schalldämmverhalten des zweischaligen Isolierfensters auswirken.

Es wird hier das Schalldämmverhalten der drei Raumgeometrien bei schallweicher, schallharter und absorbierender Ausbildung der Hohlraumwände gegenübergestellt (s. Abbildung 6.19).

Deutlich sind die Unterschiede im Schalldämm-Maß schon bei niedrigen Frequenzen. Auch der Verlauf der Schalldämmkurven unterscheidet sich. Während die Kurven für schallweiche bzw. -harte Randbedingungen relativ starke Einbrüche an bestimmten Frequenzen aufweisen, ist der Kurvenverlauf bei den Ergebnissen für die absorbierenden Randbedingungen wesentlich glatter. Dies ist im Zusammenhang mit dem dämpfenden Charakter der absorbierenden Randbedingungen auf die Hohlraumresonanzen zu sehen.

Ein quantitativer Vergleich der Schalldämmkurven zeigt erwartungsgemäß eine in der Regel bessere Schalldämmung von Fenstern mit absorbierendem Scheibenzwischenraum im Gegensatz zu Fenstern mit einem schallhartem bzw. schallweichem Scheibenzwischenraum. Allerdings ist diese Tendenz nicht für alle Frequenzen im untersuchten Bereich zu beobachten.

## 6.8 Schalldämmwirkung von Verbundglasscheiben

Die Schalldämmwirkung von Verbundglasscheiben wird am Beispiel eines zweischaligen Isolierfensters, dessen Geometrie Abbildung 6.1 entnommen werden kann, untersucht. Üblicherweise bestehen zweischalige Fenster aus zwei Einfachscheiben, die mit einem Abstand in den Fensterrahmen eingebaut sind, wie es die linke Darstellung in Abbildung 6.20 zeigt. Bei dem zu untersuchenden Fenster mit Verbundglas wird nun die äußere Scheibe durch eine Verbundglasscheibe mit dissipativer Zwischenschicht ersetzt (s. Abb. 6.20).

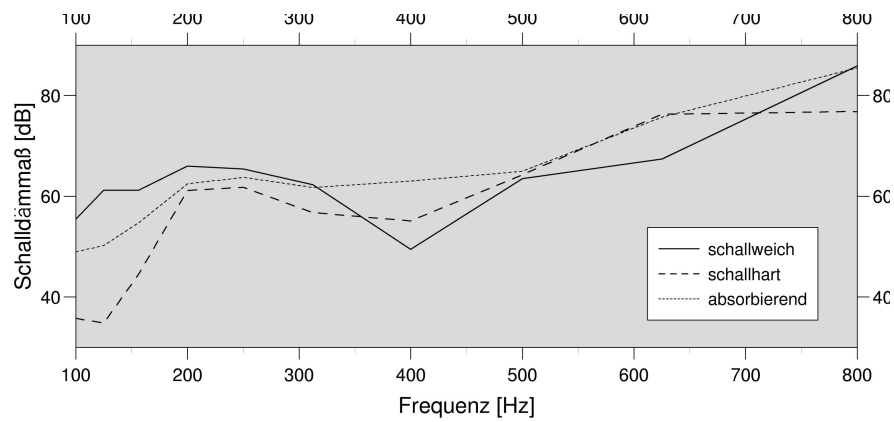
Als Material wird wiederum handelsübliches Glas verwendet, das bei der Verbundglasscheibe durch eine dissipative Zwischenschicht bestehend aus Polyvinylbutyral (PVB) verklebt sein soll. Die Materialkennwerte sind in Tabelle 6.5 zusammengefaßt.

	E-Modul [Pa]	Dichte [ $kg/m^3$ ]	Querkontraktionszahl [-]
Glas	$6,32 \cdot 10^{+9}$	2300	0,24
PVB	$1,5 \cdot 10^{+7}$	1100	0,4

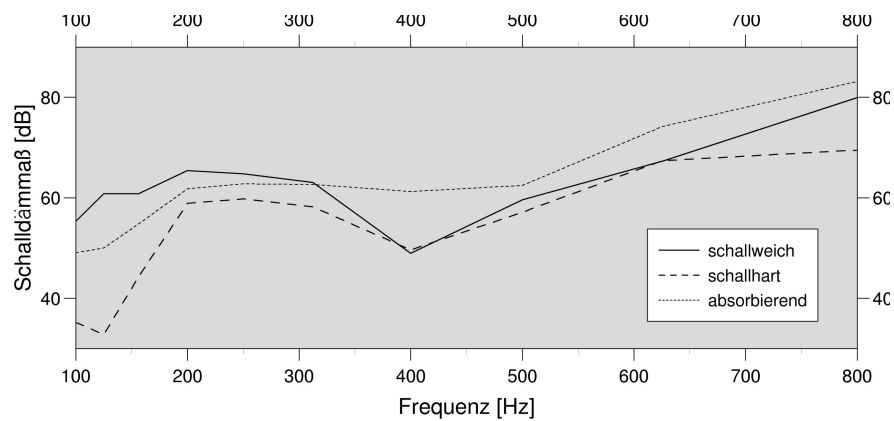
Tabelle 6.5: Materialdaten des Fensters mit Verbundglas

Die Wände des Raumes sind analog zu den vorherigen Beispielen schallhart, an den Begrenzungsflächen des Scheibenzwischenraumes wird die Wandimpedanz der Hohlraumfüllung vorgegeben. Die Schallanregung ( $q = 1 \frac{N}{m^2}$ ) erfolgt an der fensterabgewandten Stirnfläche des Raumes.

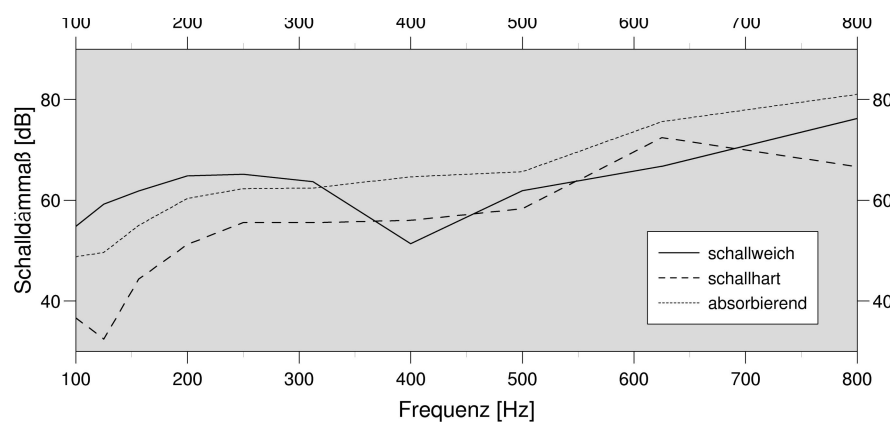
Die Berechnungen werden mit verschiedenen dicken dissipativen Schichten vorgenommen, deren Abmessungen Tabelle 6.6 zu entnehmen sind. Dabei entspricht die Gesamtdicke des Gla-



(a) Raumgeometrie 1



(b) Raumgeometrie 2



(c) Raumgeometrie 3

Abbildung 6.19: Vergleich der terzgemittelten Schalldämm-Maße bei unterschiedlicher Beschaffenheit der Wände des Scheibenzwischenraumes

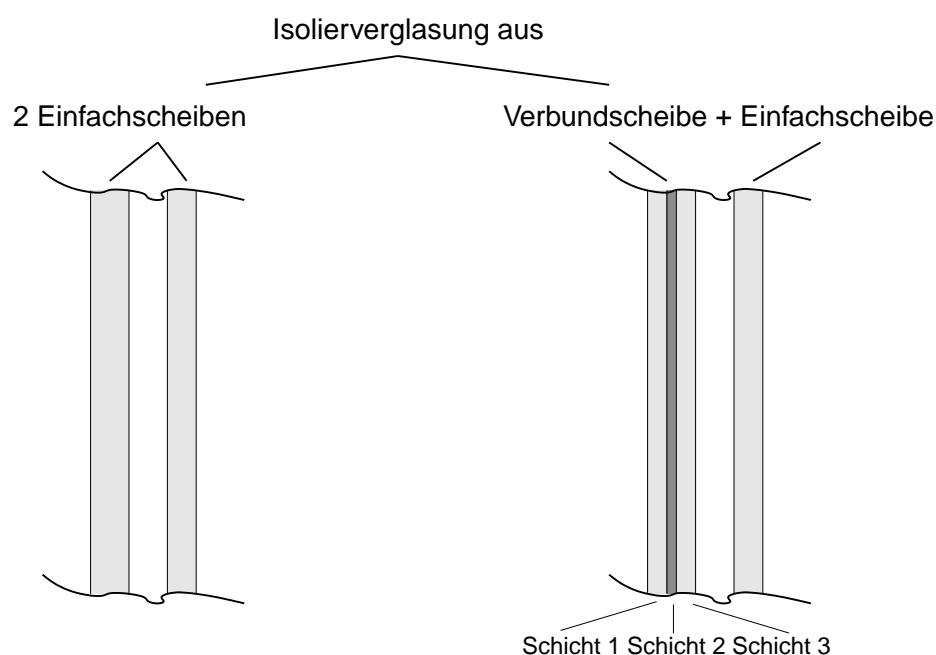


Abbildung 6.20: Schnitt durch Isolierverglasung aus zwei Einfachgläsern bzw. einem Verbundglas und einem Einfachglas

ses der Verbundscheibe der Glasscheibendicke der äußeren Glasscheibe bei einer Referenzlösung eines zweischaligen Fensters mit zwei Einfachscheiben.

	2 Einfachgläser		Einfach- + Verbundglas		
innere Scheibe	9,5		9,5	9,5	9,5
Zwischenraum	10		10	10	10
äußere Scheibe	11,5	Schicht 1	5,75	5,75	5,75
		Schicht 2	1,114	2,8	5,75
		Schicht 3	5,75	5,75	5,75

Tabelle 6.6: Abmessungen der Isolierverglasung ohne bzw. mit Verbundglas

Die Ergebnisse der gekoppelten FE/RE-Berechnung sind in den Abbildungen 6.21 und 6.22 dargestellt. In Abbildung 6.21 werden die Schalldämmkurven einer Isolierverglasung mit zwei Einfachglasscheiben und einer Isolierverglasung bestehend aus einer Einfach- und einer Verbundscheibe gegenübergestellt, wobei die Dicke der dissipativen Schicht von der Verbundglasscheibe hier 5,75 mm beträgt. Deutlich ist der dämpfende Einfluß der Zwischenschicht zu erkennen, die Peaks der strukturellen Eigenfrequenzen beim Fenster mit Verbundglas sind gegenüber den Peaks beim Fenster ohne Verbundglas abgeschwächt. Zu Verschiebungen der



Peaks kommt es durch die verminderte Steifigkeit der Verbundglasscheibe. Für höhere Frequenzen verläuft die Schalldämmkurve des Verbundglasfensters deutlich über der Referenzlösung.

Ein Vergleich der Schalldämmung von Verbundglasfenstern mit unterschiedlich dicken PVB-Schichten zeigt erwartungsgemäß, daß sich der positive Einfluß einer dissipativen Zwischenschicht für dünnere Zwischenschichten abschwächt (s. Abb. 6.22). Die Dicke der PVB-Schicht kann jedoch nicht beliebig erhöht werden, da die unbehinderte Sicht durch die Verbundscheibe sichergestellt sein muß. Insbesondere das Beispiel mit einer Zwischenschicht von 5,75 mm Dicke wird daher nicht zur Ausführung in der Praxis kommen. Allerdings vergrößert sich der Einfluß von Verbundgläsern auch für dünne Zwischenschichten mit zunehmender Frequenz, weshalb für den oberen bauakustischen Frequenzbereich starke positive Auswirkungen zu erwarten sind.

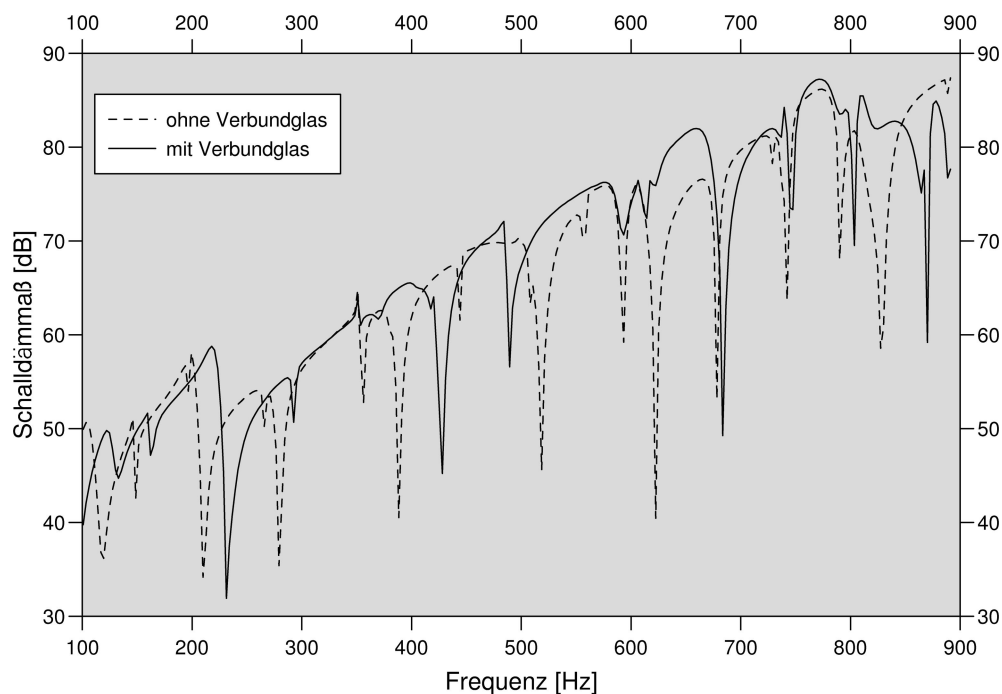


Abbildung 6.21: Vergleich des Schalldämm-Maßes von Zweifachverglasungen mit einer bzw. ohne Verbundglasscheibe

## 6.9 Konstruktionsprinzipien für Isolierverglasung mit hoher Schalldämmwirkung

Durch die oben gezeigten Beispielrechnungen wurde deutlich, daß mit dem in dieser Arbeit vorgestellten numerischen Modell aus gekoppelter Finite-Element/Randelementmethode die Schalltransmission durch Isolierverglasungen simuliert werden kann. Insbesondere können die Auswirkungen der Konstruktionsmerkmale, die in den Abschnitten 5.3.1 bis 5.3.4 mit ihren physikalischen Ursachen beschrieben wurden, abgebildet werden. Die Berechnungen wurden

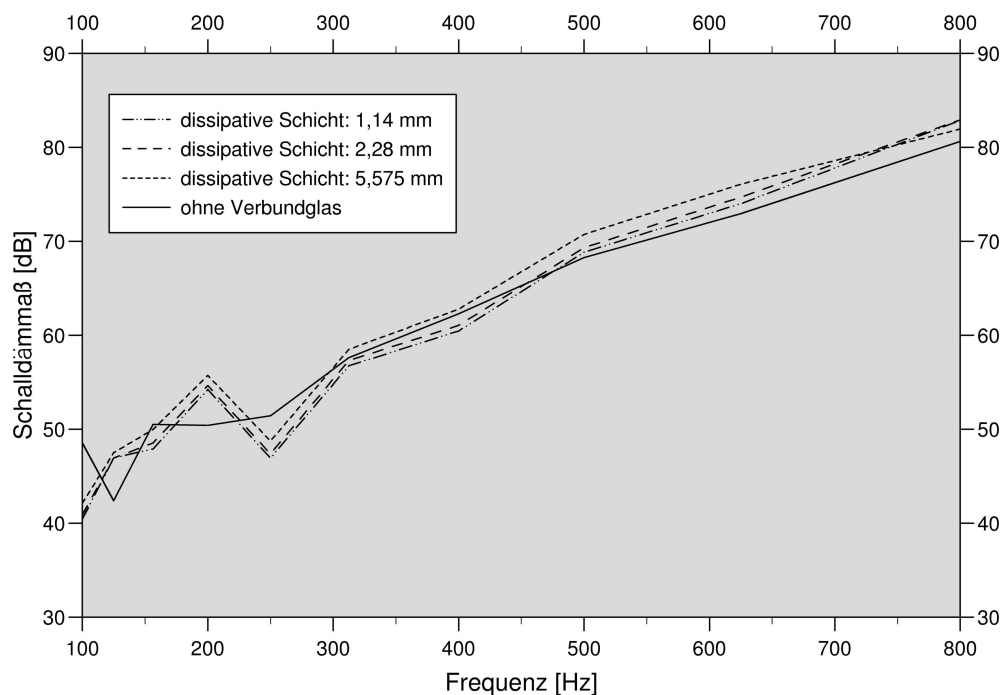


Abbildung 6.22: Vergleich des terzgemittelten Schalldämm-Maßes von Zweifachverglasungen mit einer Verbundglasscheibe bzw. ohne Verbundglasscheibe

an einer Modellkonfiguration mit einem kleinen Raum durchgeführt, können aber problemlos – bei entsprechend größerem Diskretisierungsaufwand – für beliebige Raumgeometrien und damit beliebige Einbausituationen erfolgen.

Aus den Ergebnissen der Berechnungen lassen sich folgende Empfehlungen für den Entwurf eines idealen, schalldämmenden Fensters formulieren:

Es sollten Fenster konstruiert werden mit

- Scheiben, die eine hohe flächenbezogene Masse bei möglichst geringer Steifigkeit aufweisen.
- einem möglichst mehrschaligen Aufbau, wobei auf die
  - Verwendung unterschiedlich dicker Scheiben (mit voneinander abweichenden Koinzidenzfrequenzen),
  - Realisierung eines großen Scheibenzwischenraums (mit einer tiefen Resonanzfrequenz),
  - geeignete Gasfüllung mit einem schweren Gas

Wert gelegt werden muß.

- Scheiben aus Verbundglas (mit hohen Koinzidenzfrequenzen und einem hohen Verlustfaktor).

## 6.10 Analyse von Schallfeldern

Das gekoppelte Berechnungsverfahren aus Finite-Element- und Randelementmethode zur Berechnung der Schalltransmission durch Isolierverglasung liefert als Ergebnis unter anderem das Schallfeld im zu untersuchenden Raum. Dies stellt über die Angabe des Schalldämm-Maßes bzw. des Schallpegels an wenigen, diskreten Meßpunkten bei den Experimenten hinaus eine sehr hilfreiche Möglichkeit zur Interpretation der Lärmsituation dar. In einem ersten Beispiel wird die mögliche Komplexität von Schalldruckverteilungen innerhalb eines Raumes beleuchtet und ein zweites Beispiel veranschaulicht die veränderte Schallabstrahlung einer Isolierverglasung bei streifendem Schalleinfall.

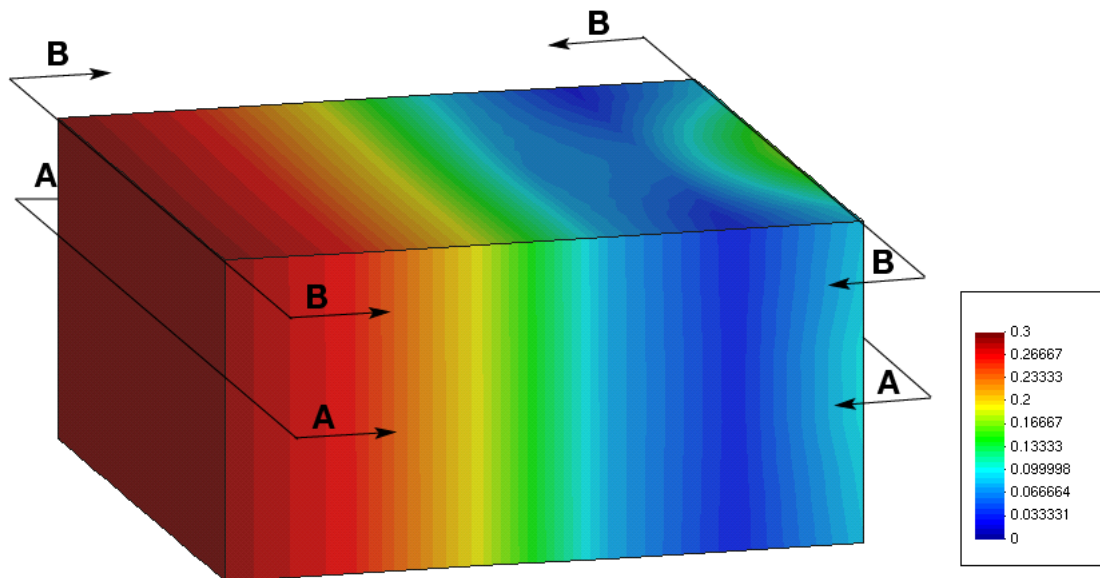
### Schalldruckverteilung in einem Raum

Als Beispielkonfiguration für die Analyse des Schallfeldes in einem Raum dient die Raumgeometrie 2 aus Abschnitt 6.5. Die Schallanregung erfolgt durch mehrere Schallquellen außerhalb des Raumes vor dem Fenster. Für die Anregungsfrequenz von 120 Hz bzw. 612 Hz sind in Abbildung 6.23 die Schalldruckverteilungen an den Begrenzungsflächen dargestellt. Im Vordergrund ist die fensterabgewandte Stirnfläche des Raumes zu erkennen. Die Abbildungen 6.24 und 6.25 zeigen die Schalldruckverteilungen für die niedrigere und die höhere Anregungsfrequenz in zwei Schnittebenen, wobei der Schnitt B–B der Deckfläche des Raumes entspricht und der Schnitt A–A in 60 % Höhe der Gesamthöhe des Raumes geführt wird.

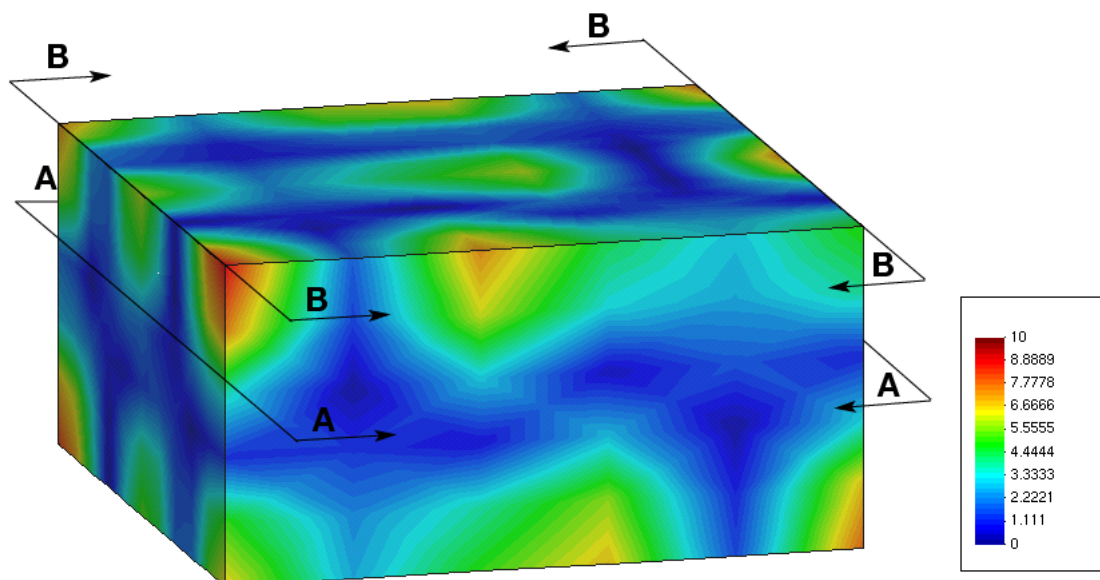
Für die *niedrige Anregungsfrequenz* zeigt sich hinter dem Fenster, also in den Abbildungen 6.24(a) und (b) jeweils im rechten Teil des Raumes, zunächst kugelförmige Schallabstrahlung durch das schwingende Bauteil. Bei größerem Abstand ist das Schallfeld annähernd eben. Die Schalldruckverteilung im Raum (Schnitt A–A) weicht nur geringfügig von der Verteilung auf der Deckfläche (Schnitt B–B) des Raumes ab.

Bei der *höheren Anregungsfrequenz* ist die Schalldruckverteilung wesentlich komplexer. Es bilden sich vielfältig Schwingungsbäuche und -täler im Raum aus, da das Trennbauteil nicht mehr in der 1. Eigenform schwingt. Dieses komplexe Verhalten spiegelt sich auch beim Vergleich der Schalldruckverteilungen in den beiden Schnitten wider (s. Abb. 6.25). Das Schallfeld ist weder direkt vor, noch in weiterer Entfernung vom Fenster eben, es variiert sehr stark über die Höhe des Raumes.

In einem Raum kann es demnach aufgrund der geometrischen Gegebenheiten zu besonders lauten und besonders leisen Orten kommen, wobei diese Aussage nicht nur bei den hier dargestellten monofrequenten Anregungen Gültigkeit hat, sondern auch auf realistische, breitbandigere Anregungen erweiterbar ist. Die Vorhersage von Orten hohen Schalldrucks ist schwierig, wenn nur das Schalldämm-Maß eines Trennbauteils oder der Schallpegel nur an wenigen Meßpunkten bekannt ist. Insbesondere für komplizierte Raumgeometrien, die mit dem Berechnungsverfahren problemlos modelliert werden können, erweist sich daher die rechnerische Ermittlung von Schallfeldern als vorteilhaft gegenüber den experimentellen Verfahren.

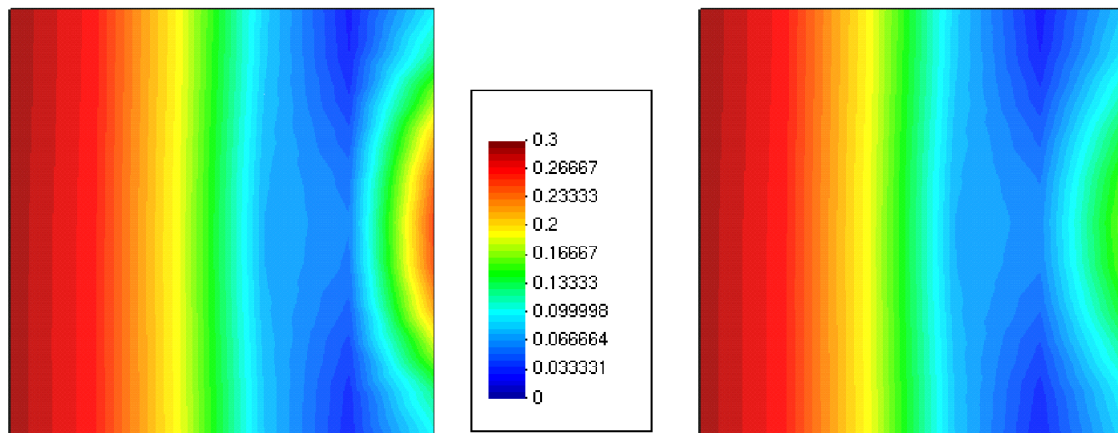


(a) Anregungsfrequenz: 120 Hz



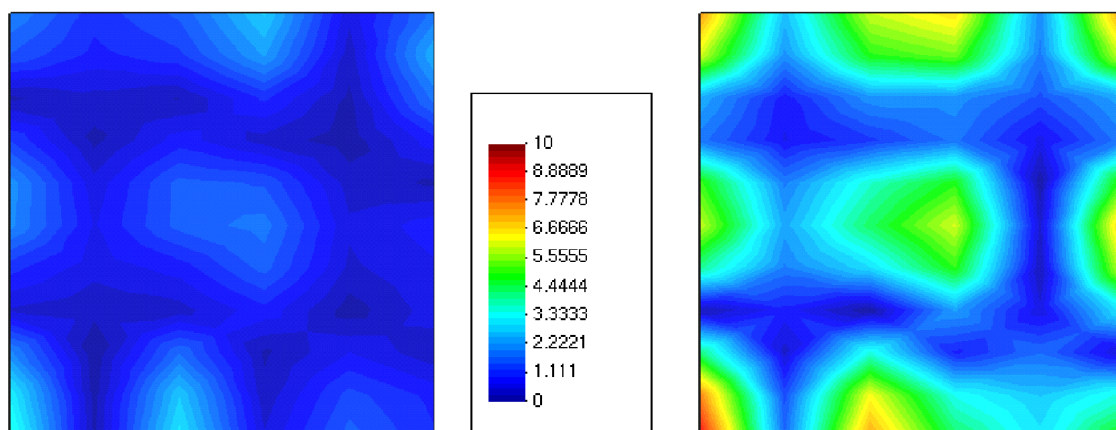
(b) Anregungsfrequenz: 612 Hz

Abbildung 6.23: Schalldruckverteilung auf den Begrenzungsflächen des Raumes



(a) Schnittebene A–A

(b) Schnittebene B–B

*Abbildung 6.24: Schalldruckverteilung in Schnittebenen bei 120 Hz*

(a) Schnittebene A–A

(b) Schnittebene B–B

*Abbildung 6.25: Schalldruckverteilung in Schnittebenen bei 612 Hz*

### Abgestrahltes Schallfeld einer schwingenden Struktur

Neben dem Schallfeld im Raum kann auch die Schalldruckverteilung in der Umgebung visualisiert werden, um einen Eindruck vom abgestrahlten Schallfeld der schwingenden Struktur zu bekommen. Im Randelementgebiet liegen die Schallfeldgrößen zunächst nur am Rand vor, weshalb eine Innenpunktauswertung vorgenommen werden muß, d.h. mittels einer einfachen Nachlaufrechnung wird der Schalldruck im RE-Gebiet, also vor dem Gebäude, ermittelt.

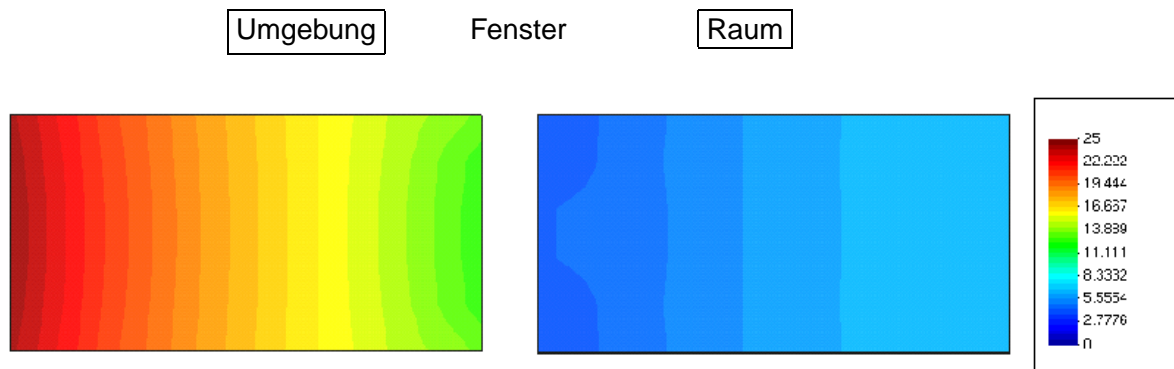
Die Berechnung des von einer Isolierverglasung abgestrahlten Schalls wird an der im vorherigen Abschnitt beschriebenen Modellkonfiguration vorgenommen. Die Schallanregung von außen erfolgt durch senkrechten bzw. streifenden Schalleinfall. In Abbildung 6.26 ist die Schalldruckverteilung für zwei Anregungsfrequenzen in einem senkrechten Schnitt in der Mitte des Raumes dargestellt, wie sie sich aufgrund der Schalltransmission durch die Verglasung ergibt, sowie die Schalldruckverteilung vor dem Fenster, die ein Resultat von Reflexion und Interaktion an der Koppelfläche ist.

Für die *langwellige Anregung* in den Abbildungen 6.26(a) und 6.26(b) ist vor dem Fenster ein relativ ebenes Wellenfeld zu erkennen, das annähernd senkrecht (s. Abb. 6.26(a)) bzw. vollkommen streifend (s. Abb. 6.26(b)) auf das Trennbauteil trifft. In der Nähe des Fensters ist das ebene Schallfeld durch Wechselwirkungseffekte mit dem Fenster jeweils leicht gestört. Das Schallfeld hinter dem Trennbauteil ist sowohl beim senkrechten als auch beim streifenden Schalleinfall bis auf die unmittelbare Umgebung vom Trennbauteil eben.

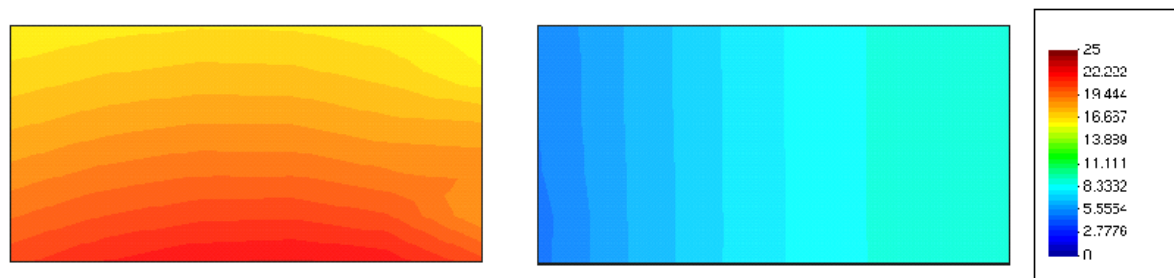
Eine *kurzwellige Anregung* bewirkt vor dem Fenster eine ungleichförmige Schalldruckverteilung. Für den Fall des senkrechten Schalleinfalls (s. Abb. 6.26(c)) sind für diese spezielle Frequenz die Rückwirkungseffekte mit der Platte so stark, daß vor dem Fenster eine Zone extrem hohen Schalldrucks entsteht. Das Schallfeld im Raum kann bis auf die Störungen im Bereich des schwingenden Fensters aber wiederum als annähernd eben bezeichnet werden. Beim streifenden Schalleinfall ist für diese Anregungsfrequenz die Schalldruckverteilung sowohl vor dem Fenster als auch hinter dem Fenster sehr kompliziert (s. Abb. 6.26(d)). Insbesondere in den Ecken des Raumes kommt es aufgrund von vielfältigen Reflexionsmöglichkeiten zu Orten sehr hohen Schalldrucks. Auslöschungseffekte von sich überlagernden Wellen führen lokal zu niedrigen Schalldrücken.

Schon durch diese beiden beispielhaften Anregungsfrequenzen bzw. Arten der Schallanregung wird klar, daß sich zum einen durch die Interaktion zwischen der schwingenden Struktur mit dem umgebenden Fluid und zum anderen durch akustische Effekte, wie Reflexionen, Auslöschungen oder die an Kanten relevanten Beugungseffekte, die Problematik der Schalltransmission und –ausbreitung als sehr komplex erweist. Es können sich durch die beschriebenen Effekte lokal Zonen bilden, in denen die Schallfeldgrößen im Vergleich zum erwarteten Verhalten gegenteilige Werte aufweisen. So finden sich beispielsweise in insgesamt „leisen“ Räumen mit niedrigen resultierenden Schalldruckpegeln durchaus Gebiete mit sehr hohem Schallpegel. Genauso können in einem Schallfeld mit im ganzen sehr hohen Schalldruckpegeln lokal begrenzt relativ niedrige Werte zu finden sein.

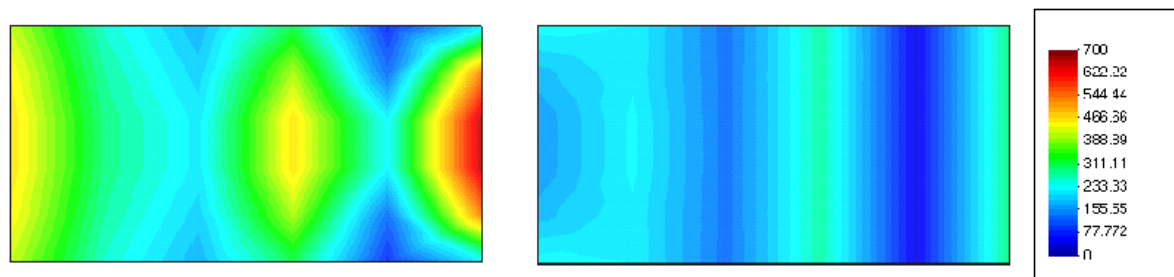




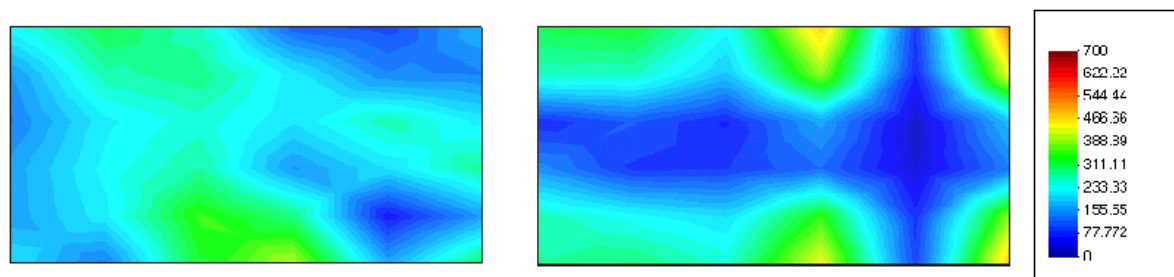
(a) Senkrechter Schalleinfall; Anregungsfrequenz: 56 Hz



(b) Streifender Schalleinfall: Anregungsfrequenz: 56 Hz



(c) Senkrechter Schalleinfall; Anregungsfrequenz: 631 Hz



(d) Streifender Schalleinfall: Anregungsfrequenz: 631 Hz

Abbildung 6.26: Schalldruckverteilung vor und hinter dem Trennbau teil bei senkrechtem bzw. streifendem Schalleinfall

## 7 Zusammenfassung und Ausblick

Mit dem vorgestellten numerischen Verfahren wird die Simulation von Schalltransmissionsvorgängen durch Isolierverglasungen möglich. Ausgehend von der Modellbildung für den Transmissionsmechanismus, der die Schwingungsanregung eines plattenförmigen Bauteils und die Abstrahlung von Schall durch die schwingende Platte umfaßt, erfolgt eine Beschreibung unterschiedlicher Diskretisierungsmethoden für die Struktur sowie das umgebende Fluid. Aus diesen Diskretisierungsverfahren werden die für die vorliegende Problemstellung vorteilhaften Methoden ausgewählt. Das akustische Verhalten insbesondere von mehrschaligen Isolierverglasungen wird durch komplexe Wirkungen und Rückwirkungen zwischen den Glasscheiben, der Gasfüllung im Scheibenzwischenraum und der Luft bestimmt. Dies findet im vorgestellten Berechnungsverfahren Berücksichtigung durch eine Kopplung der Diskretisierungsmethoden, die Wechselwirkungen zwischen den Teilsystemen erfaßt.

Die Anwendungen des Berechnungsverfahrens verdeutlichen, wie die Konstruktionsparameter die Schalldämmung beeinflussen. Im einzelnen werden Scheibendicke und -material, Verbundglasscheiben mit dissipativer Zwischenschicht sowie bei mehrschaligem Aufbau Scheibenabstand und Hohlraumfüllung bezüglich ihrer Auswirkungen auf die akustischen Eigenschaften der gesamten Verglasung untersucht. Daneben wird die Abhängigkeit des Schalldämmverhaltens von der Lagerung der Glasscheiben und von den akustischen Randbedingungen im Scheibenzwischenraum aufgezeigt. Neben den Konstruktionsmerkmalen des Trennbauteils haben weitere Parameter Einfluß auf das akustische Verhalten, die anhand von Beispielrechnungen näher studiert werden. Es sind dies vor allem die Geometrie des zu untersuchenden Raumes und die Art und der Ort der Schallanregung. Da sich diese Einflüsse nicht unerheblich auf die Schalldämmung eines Trennbauteils auswirken, wie dies auch andere Autoren sehr detailliert untersucht haben [50, 71, 81], müßte sich diese Tatsache auch in den Nachweisverfahren niederschlagen. Eine Überarbeitung der bestehenden Normen und insbesondere der standardisierten Prüfverfahren im Hinblick auf eine an spezifische Situationen angepaßte Ermittlung der Schalldämmung scheint wünschenswert. Die neue europäischen Norm EN 12354-1 [34] für die Rechenmodelle zur Ermittlung der Luftschalldämmung liefert mit einer umfassenderen Berücksichtigung von flankierenden Bauteilen und speziellen Einbausituationen einen wichtigen Beitrag in diese Richtung.

Dem Ingenieur liegt durch diese Berechnungsmethode ein Werkzeug vor, mit dem die Schalldämmwirkung von Isolierverglasungen bestimmt werden kann. Dabei kann durch die Berechnung des Schalldämm-Maßes der Nachweisen zugrunde liegende Einzahlwert berechnet werden. Darüber hinaus erhält man einen Eindruck von der Lärmsituation im zu untersuchenden Gebäude, da außerdem die Schallfelder bestimmt werden. Sollte die Schalldämmwirkung des



Berechnungsobjektes nicht zufriedenstellend sein, so können die Auswirkungen konstruktiver Modifikationen durch einen Vergleich mit einer neuen Rechnung leicht ermittelt werden. Da durch das Berechnungsverfahren außerdem der eingebaute Zustand mit den jeweiligen geometrischen Gegebenheiten berücksichtigt wird, kann die Bemessung des Trennbauteils individuell auf das jeweilige Gebäude abgestimmt werden.

Die Sensibilisierung der Gesellschaft für ressourcenschonendes Wohnen und damit für die Verbesserung der bauphysikalischen Eigenschaften von Häusern führte in jüngerer Zeit zu neuen technischen Entwicklungen. So wurde die Möglichkeit, die Schallabstrahlung von schwingenden Platten durch Aktuatoren zu minimieren, erstmals auf Isolierfenster erfolgreich angewendet [56, 62, 83]. Ein anderer vielversprechender Weg ist die Entwicklung und Verwendung von transparenter Wärmedämmung aus Aerogelgranulaten oder Kapillardämmstoffmatten, die interessante Tendenzen bezüglich schallschutztechnischer Eigenschaften zeigen. Sowohl die numerische Simulation von aktiver Schalldämmung als auch die Untersuchung von transparenter (Wärme-) Dämmung stehen jedoch noch am Anfang.

# Verzeichnis der verwendeten Symbole

$c$	Schallgeschwindigkeit [ $m/s$ ]
$\mathbf{d}$	Lastvektor (Fluid)
$f_{gr}$	Grenzfrequenz [ $2\pi/s$ ]
$\mathbf{f}$	Lastvektor (Platte)
$h$	Plattendicke [ $m$ ]
$i$	imaginäre Einheit: $\sqrt{-1}$
$m'$	flächenbezogene Masse (Dichte x Dicke) [ $kg/m^2$ ]
$n$	Flächennormale
$p$	Druck, Schalldruck [ $N/m^2$ ]
$p^*$	Fundamentallösung für den Schalldruck
$\mathbf{p}$	Vektor der unbekannten Schalldrücke an den Knoten
$q$	Schallfluß [ $N/m^3$ ]
$q^*$	Normalableitung der Fundamentallösung für den Schalldruck
$\mathbf{q}$	Vektor der unbekannten Schallflüsse an den Knoten
$r$	- Reflexionsfaktor $[-]$
$t$	Zeit [ $s$ ]
$\mathbf{u}$	Vektor der Verformungsfreiheitsgrade an den Knoten
$v$	Schnelle (Teilchengeschwindigkeit) [ $m/s$ ]
$w$	Durchbiegung der Platte [ $m$ ]
$x, y, z$	kartesische Koordinaten
$z^o$	Impedanz [ $Ns/m$ ]
$A$	Fläche [ $m^2$ ]
$B$	Biegesteifigkeit einer Platte [ $Nm$ ]
$\mathbf{C}$	Kopplungsmatrix
$\mathbf{D}$	Dämpfungsmatrix
$D$	- Modul [ $N/m^2$ ] - Abstand von Mittelebene der Grundplatte zur neutralen Faser der Laminatplatte [ $m$ ]
$E$	- Elastizitätsmodul [ $N/m^2$ ] - Energie [ $Nm$ ]

<b>E</b>	Elastizitätsmatrix
<b>F</b>	Kraft [ $N$ ]
<b>G</b>	Schubmodul [ $N/m^2$ ]
<b>H</b>	Abstand der Mittelebenen bei Laminatplatten [ $m$ ]
<b>G, H</b>	Einflußmatrizen
<b>K</b>	Kompressionsmodul [ $N/m^2$ ]
<b>K</b>	Steifigkeitsmatrix
<b>K<sub>1</sub></b>	Kompressibilitätsmatrix
<b>K<sub>2</sub></b>	Massenmatrix
<b>L</b>	Schallpegel [ $dB$ ]
<b>M</b>	Moment [ $Nm$ ]
<b>M</b>	Massenmatrix
<b>N</b>	Ansatzfunktion
<b>R</b>	Schalldämmmaß [ $dB$ ]
<b>T</b>	Temperatur [ $K$ ]
<b>V</b>	Volumen [ $m^3$ ]
<b>W</b>	Arbeit [ $Nm$ ]
<b><math>\alpha</math></b>	Absorptionsgrad $[-]$
<b><math>\eta</math></b>	- Bewegung in y-Richtung [ $m$ ] - Verlustfaktor $[-]$
<b><math>\varepsilon</math></b>	Dehnung $[-]$
<b><math>\gamma</math></b>	Scherung $[-]$
<b><math>\kappa</math></b>	- Wellenzahl (Kreisfrequenz / Schallgeschwindigkeit) [ $m^{-1}$ ] - Isentropenexponent $[-]$
<b><math>\lambda</math></b>	Wellenlänge (Schallgeschwindigkeit / Kreisfrequenz) [ $m$ ]
<b><math>\nu</math></b>	- Zähigkeit $[-]$ - Querkontraktionszahl $[-]$
<b><math>\omega</math></b>	- Kreisfrequenz [ $s^{-1}$ ] - Nachwirkungsfunktion
<b><math>\rho</math></b>	Dichte [ $kg/m^3$ ]
<b><math>\sigma</math></b>	Normalspannung [ $N/m^2$ ]
<b><math>\tau</math></b>	- Schubspannung [ $N/m^2$ ] - Relaxationszeit [ $s$ ]
<b><math>\xi</math></b>	Bewegung in x-Richtung [ $m$ ]
<b><math>\zeta</math></b>	Bewegung in z-Richtung [ $m$ ]
<b><math>\Gamma</math></b>	Rand
<b><math>\Omega</math></b>	Gebiet

---

$\phi$	Biegewinkel [ <i>rad</i> ]
$\Psi$	Scherwinkel [ <i>rad</i> ]
$\delta(x)$	Dirac Distribution
$\Delta$	- Änderung, Differenz - Laplaceoperator
$\Im\{\dots\}$	Imaginärteil
$\Re\{\dots\}$	Realteil
$\frac{\partial(\dots)}{\partial t} = (\dot{\dots})$	partielle Zeitableitung
$\frac{\partial(\dots)}{\partial n}$	Normalenableitung
$\frac{\partial(\dots)}{\partial i} = (\dots)_{,i}$	partielle Ableitung nach i
$\underline{(\dots)}$	komplexe Größe

# Literaturverzeichnis

- [1] Ahrens, H.; Dinkler, D.: *Finite-Element-Methoden Teil I/II*. Bericht Nr. 88-50/51 aus dem Institut für Statik der TU Braunschweig, 1994.
- [2] Altenbach, H.; Altenbach, J.; Naumenko, K.: *Ebene Flächentragwerke*. Springer-Verlag, 1998.
- [3] Antes, H.: On a regular boundary integral equation and a modified Trefftz method in Reissner's plate theory. *Engineering Analysis*, **1**, 149–153, 1984.
- [4] Antes, H.: *Anwendungen der Methode der Randelemente in der Elastodynamik und der Fluidodynamik*. B.G. Teubner, 1988. Stuttgart.
- [5] Antes, H.: Applications in Environmental Noise. In *Boundary Element Methods in Acoustics*, R.D. Ciskowski and C.A. Brebbia, Chapter 11, 1991.
- [6] Antes, H.; v. Estorff, O.: Propagation of transient acoustic waves – an analysis by a time-stepping boundary element method. *Ing. Archiv*, **59**, 17–31, 1989.
- [7] Astley, R.J.: Infinite Elements for Acoustics. In *Proc. Sixth International Congress on Sound and Vibration*, 523–538, 1999.
- [8] Astley, R.J.: Infinite elements for wave problems: a review of current formulations and an assessment of accuracy. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **49**, 951–976, 2000.
- [9] Astley, R.J.; Eversman, W.: Finite Element Formulation for Acoustical Radiation. *Journal of sound and vibration*, **88**(1), 47–64, 1983.
- [10] Baaran, J.: *Schallfeldanalyse bei sich bewegenden schallerzeugenden Körpern*, Vol. 38. Braunschweiger Schriften zur Mechanik, 1999.
- [11] Baehr, H.D.: *Thermodynamik*. Springer-Verlag, 1996.
- [12] Bathe, K.J.; C.Nitikitpaiboon; X.Wang: A Mixed Displacement-based Finite Element Formulation for acoustic Fluid-Structure Interaction. *Computers & Structures*, **56**(2/3), 225–237, 1995.
- [13] Berger, R.: *Über die Schalldurchlässigkeit*. Diss., München, 1910.

- [14] Bermudez, A.; Hervella-Nieto, L.: Finite Element Computation of Three-Dimensional Elastoacoustic Vibrations. *Journal of sound and vibration*, **219**(2), 279–306, 1999.
- [15] Bettess, P.: *Infinite Elements*. Penshaw Press, 1992.
- [16] Bettess, P.; Zienkiewicz, O.C.: Diffraction and refraction of surface waves using finite and infinite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **11**, 1271–1290, 1977.
- [17] Bohmann, D.: *Ein numerisches Verfahren zur Berechnung von Verbundglasscheiben*. Diss., RWTH Aachen, 1998.
- [18] Burg; Haf; Wille: *Höhere Mathematik für Ingenieure*, Vol. 5. B.G. Teubner, Stuttgart, 1993.
- [19] Burton, A.J.; Miller, G.F.: The Application of the Integral Equation Methods for Acoustic Radiation Valid for All Wavenumbers. *Proc. Roy. Soc. Lond. A.*, **323**(201–210), 1971.
- [20] Cederfeldt, L.: A Finite Element Approach to Two-Dimensional Sound Radiation and a Discussion of Sound Insulation of Corrugated Plates. *Report 59, Division of Building Technology, Lund Institute of Technology*, 1975.
- [21] Cederfeldt, L.: *On the use of finite element method on some acoustical problems*. Swedish Council for Building Research, Stockholm, 1979.
- [22] Chen, H. C.; Taylor, R. L.: Vibration Analysis of Fluid-Solid Systems using a Finite Element Displacement Formulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **29**, 683–698, 1990.
- [23] Cheng, W.: *Schallabstrahlung einer schwingenden Reissner/Mindlin Platte*, Vol. 10. Braunschweiger Schriften zur Mechanik, 1993.
- [24] Coyette, J.P.; Fyfe, K.R.: Solution of Elasto-Acoustic Problems using a variational Finite Element/Boundary Element Techniques. *Numerical techniques in acoustic radiation*, **6**, 15–25, 1989. ASME Analysis Techniques in Acoustics Committee.
- [25] Craggs, A.; Stead, G.: Sound Transmission between Enclosures - A Study Using Plate and Acoustic Finite Elements. *Acustica*, **35**(2), 89–98, 1976.
- [26] Craik, R.J.M.: *Sound Transmission through Building - Using Statistical Energy Analysis*. Gower, 1996.
- [27] Cremer, L.; Heckl, M.: *Körperschall*. Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [28] Crighton, D.G.; Dowling, A.P.; Williams, J.E. Ffowcs; Heckl, M.; Leppington, F.G.: *Modern Methods in Analytical Acoustics*. Springer-Verlag, 1992.

- [29] de Veubeke, B. Fraeijs: Variational principles and the patch test. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **8**, 783–801, 1974.
- [30] DIN 4109: *Schallschutz im Hochbau - Anforderungen und Nachweise*. DIN Taschenbuch 35: Schallschutz. Beuth, 1997.
- [31] Dominguez, J.: *Boundary Elements in Dynamics*. Computational Mechanics Publications - Elsevier Applied Science, 1993.
- [32] Dominguez, J.; R, Abascal: Dynamics of Foundations In *Topics in Boundary Element Research*. (Brebbia, C.A., Ed.), Springer-Verlag, 1984.
- [33] Dubus, B.: Coupling finite element and boundary element methods on a mixed solid-fluid/fluid-fluid problem. *Journal of the Acoustical Society of America*, **96**(6), 3792–3799, 1994.
- [34] EN 12354: *Berechnung der akustischen Eigenschaften von Gebäuden aus Bauteileigenschaften*. Beuth, 2000.
- [35] EN ISO 140: *Akustik – Messung der Schalldämmung in Gebäuden und von Gebäudeteilen*. Beuth, 1998.
- [36] Ertel, H.; Finkenberger, M.; Mechel, F.P.: Zum Einfluß von Gasfüllungen auf die Schalldämmung von Isolierglasscheiben im Resonanzbereich. *IBP*, **82**, 1982.
- [37] Estorff, O. von: Discretization Methods in Acoustics and Noise Control. *euro noise 98, Designing for Silence*, 1998.
- [38] Estorff, O. von: *Boundary Elements in Acoustics - Advances & Applications*. WIT Press, 2000.
- [39] Fahy, F.: *Sound and Structural Vibration*. Academic Press, 1985.
- [40] Fasold, W.; Veres, E.: *Schallschutz und Raumakustik in der Praxis*. Verlag für Bauwesen, Berlin, 1998.
- [41] Flügge, W.: *Viscoelasticity*. Springer-Verlag, 1975.
- [42] Forest, L.; Gibiat, V.; Woignier, T.: Biots' theory of acoustic propagation in porous media to aerogels and alcogels. *Journal of Non-Crystalline Solids*, **225**, 287–292, 1998.
- [43] Fricke, F.; Moser, L.M.; Scheurer, H.; Schubert, G.: *Schall und Schallschutz*. physik-verlag, 1983.
- [44] Fricke, J.: *Digest: Moderne Werkstoffe*, 102–115. Spektrum d. Wiss. Verl., 1996.
- [45] Germey, R.: TWD - Transparente Wärmedämmung. *Dt. Architektenblatt*, **5**, 699–706, 1999.

- [46] Giljohann, D.; Bittner, M.: The Three-Dimensional DtN Finite Element Method for Radiation Problems of the Helmholtz Equation. *Journal of sound and vibration*, **212**(3), 383–394, 1998.
- [47] Givoli, D.: *Numerical Methods for Problems in Infinite Domain*. Elsevier Science, 1992.
- [48] Gösele, K.; Gösele, U.; Lakatos, B.: Einfluß einer Gasfüllung auf die Schalldämmung von Isolierglasscheiben. *Acustica*, **38**, 167–174, 1977.
- [49] Gösele, K.; Schüle, W.; Lakatos, B.: *Gasfüllung bei Isolierscheiben. Ihr Einfluß auf den Schall- und Wärmeschutz*. Fraunhofer-Institut für Bauphysik, Forschungsbericht T1305, IRB Verlag, 1981.
- [50] Goydke, H.; Koch, S.; Mechel, F.P.; Raabe, G.: Untersuchungen über Einflüsse auf die Schalldämm-Maße von Fenstern und Scheiben in Prüfständen. *Acustica*, **56**(3), 169–179, 1984.
- [51] Gronauer, M.; Fricke, J.: Acoustic Properties of Microporous  $\text{SiO}_2$ -Aerogel. *Acustika*, **59**, 177–181, 1986.
- [52] Guy, R.W.: The Transmission of Airborne Sound through a Finite Panel, Air Gap, Panel and Cavity Configuration - a Steady State Analysis. *Acustica*, **49**, 323–333, 1981.
- [53] Hackbusch, W.: *Integralgleichungen – Theorie und Numerik*. Teubner Studienbücher, 1997.
- [54] Hamdi, M.A.; Ousset, Y.; Verchery, G.: A displacement method for the analysis of vibrations of coupled fluid-structure system. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **13**, 139–150, 1978.
- [55] Harari, I.; Barbone, P.; Slavutin, M.; Shalom, R.: Boundary infinite elements for the Helmholtz Equation in exterior Domains. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **41**, 1105–1131, 1998.
- [56] Heitfeld, R.; Jakob, A.; Möser, M.: Aktive Verbesserung der Luftschalldämmung von kleinen Doppelfenstern. *Bericht des Instituts für Technische Akustik, TU Berlin*, 1999.
- [57] Henn, H.; Sinambari, G.R.; Fallen, M.: *Ingenieurakustik*. Vieweg, 1984.
- [58] Hohmann, R.; Setzer, M.: *Bauphysikalische Formeln und Tabellen*. Werner Verlag, 1997.
- [59] Interpane Glas Industrie AG: *Gestalten mit Glas*. Interpane, 1994.
- [60] Irons, B.M.; Draper, J.K.: Inadequacy of nodal connections in a stiffness solution for plate bending. *AIAA journal*, **3**(5), 1965.
- [61] Jäger, M.: *Entwicklung eines effizienten Randelementverfahrens für bewegte Schallquellen*, Vol. 17. Braunschweiger Schriften zur Mechanik, 1994.



- [62] Jakob, A.; Möser, M.: Active Control of the Cavity Sound Field of Double Panels with a Feedback Controller. In *Proc. 7th International Congress on Sound and Vibration*, Garmisch-Partenkirchen, 2000.
- [63] Jeans, R.A.; Mathews, I.C.: Solution of fluid-structure interaction problems using a coupled finite element and variational boundary element technique. *Journal of the Acoustical Society of America*, **88**(5), 2459–2466, 1990.
- [64] Jeans, R.A.; Mathews, I.C.: A unique coupled boundary element/finite element method for the elastoacoustic analysis of fluid-filled thin shells. *Journal of the Acoustical Society of America*, **94**(6), 3473–3479, 1993.
- [65] Joos, G.: *Lehrbuch der theoretischen Physik*. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.G., 1956.
- [66] Kerwin, E.M., Jr.: Damping of Flexural Waves by Constrained Viscoelastic Layer. *Journal of the Acoustical Society of America*, **31**(7), 952–962, 1959.
- [67] Klein, P.: *Zur Beschreibung der dynamischen Wechselwirkung von Fundamentstrukturen mit dem viskoelastischen Baugrund durch dreidimensionale Randelementformulierungen*. Diss., Universität der Bundeswehr, Hamburg, 1989.
- [68] Knothe, K.; Wessels, H.: *Finite Elemente*. Springer, 1999.
- [69] Koch, S.: Schalldämmung von Verglasungen mit transparenter Wärmedämmung. *IBP Mitteilung*, **232**, 1993.
- [70] Koch, S.; Bühner, A.: Verbesserung der Schalldämmung von Fensterrahmen im mittleren Frequenzbereich. *IBP Mitteilung*, **170**, 1988.
- [71] Koch, S.; Mechel, F.P.: Einflußgrößen bei der Bestimmung der Schalldämmung von Bauteilen. *IBP Mitteilung*, **84**, 1984.
- [72] Kopuz, S.; Ünlüsoy, Y.S.; Caliskan, M.: Integrated FEM/BEM approach to the dynamic and acoustic analysis of plate structures. *Engineering analysis with boundary elements*, **17**, 269–277, 1996.
- [73] Kurtze, G.; H.Schmidt; Westphal, W.: *Physik und Technik der Lärmbekämpfung*. G. Braun, 1975.
- [74] Leis, R.: *Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung*. Bibliographisches Institut Mannheim, Mannheim, 1967.
- [75] Leissa, A.: *Vibrations of plates*. Acoustical Society of America, 1993.
- [76] Li, W.L.; Wu, T.W.; Seybert, A.F.: A Half-Space Boundary Element Method for Acoustic Problems with a reflecting Plane of Arbitrary Impedance. *Journal of sound and vibration*, **171**(2), 173–184, 1994.

- [77] Lin, C.-C.; Lawton, E.C.; Caliendo, J.A.; Anderson, L.R.: An Iterative Finite Element-Boundary Element Algorithm. *Computers & Structures*, **39**(5), 899–909, 1996.
- [78] Mahrenholtz, O.; Gaul, L.: *Dämpfungsfragen*. Lehrgangshandbuch 32-12-03, VDI-Bildungswerk, BW 2950, 1977.
- [79] McCulloch, C.; L.Cremers; Guisset, P.: Numerical modelling of acoustic transparency In *Boundary Elements in Acoustics - Advances & Applications*. (Estorff, O. von, Ed.), WIT Press, 2000.
- [80] Mechel, F.P.; Koch, S.; Lakatos, B.: Die Schalldämmung von Fensterrahmen. *IBP Mitteilung*, **61**, 1981.
- [81] Moll, W.; Marx, B.: Schallschutz oder Schalldämmung. *Zeitschrift für Lärmbekämpfung*, **45**, 67–72, 1998.
- [82] Morse, P.M.; Ingard, K.U.: *Theoretical Acoustics*. Princeton University Press, 1986.
- [83] Möser, M.; Jakob, A.: Grundlagen der aktiven Minimierung der Schallabstrahlung von schwingenden Platten. *Bericht des Instituts für Technische Akustik, TU Berlin*, 1996.
- [84] Nashif, A.D.; Jones, D.I.G.; Henderson, J.P.: *Vibration Damping*. Wiley - Interscience, 1985.
- [85] Oberst, H.: Werkstoffe mit extrem hoher innerer Dämpfung. *Acustica*, **1**(Akustische Beihefte 1), 144–153, 1956.
- [86] Oberst, H.; Becker, G.W.; Frankenfeld, K.: Über die Dämpfung der Biegeschwingungen dünner Bleche durch fest haftende Beläge II. *Acustica*, **4**(Akustische Beihefte 4), 433–444, 1954.
- [87] Oberst, H.; Frankenfeld, K.: Über die Dämpfung der Biegeschwingungen dünner Bleche durch fest haftende Beläge. *Acustica*, **2**(Akustische Beihefte 4), 181–194, 1952.
- [88] Plass, H.J.: Damping of Vibrations in Elastic Rods and Sandwich Structures by Incorporation of Additional Viscoelastic Material. In *Proc. Third Midwestern Conference on Solid Mechanics*, 1957.
- [89] Reese, T.; Zoglowek, D.: *Experimentelle Ausführung und Erprobung lärmgeminderter Reifen*. Bundesministerium für Forschung und Technologie, 1987.
- [90] Ross, D.; Ungar, E.E.; E.M. Kerwin, Jr.: Damping of Plate Flexural Vibrations by Means of Viscoelastic Laminae. In *Structural Damping*, ASME, 49–88, 1959.
- [91] Saint-Gobain Glass: *SGG CLIMAPLUS Acoustic - Produktinformation*. France, 2000.
- [92] Schenk, H.A.: Improved Integral Formulation for Acoustic Radiation Problems. *Journal of the Acoustical Society of America*, **44**(1), 41–58, 1968.

- [93] Schilling, S.: *Ursachen und Minderungspotential des von der Einspritzpumpe induzierten Motorgeräusches*. Diss., TH Aachen, 1995.
- [94] Schnack, E.; Türke, K.: Domain Decomposition with BEM and FEM. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **40**, 2593–2610, 1997.
- [95] Seybert, A.F.; Soenarko, B.: Radiation and scattering of acoustic waves from bodies of arbitrary shape in a three dimensional half space. *Journal of vibration, acoustics, stress, and reliability in design*, **110**, 112–117, 1988.
- [96] Seybert, A.F.; Wu, T.W.: Modified Helmholtz integral equation for bodies sitting on an infinite plane. *Journal of the Acoustical Society of America*, **85**(1), 19–23, 1989.
- [97] Skudrzyk, E.: *Die Grundlagen der Akustik*. Springer-Verlag, Wien, 1954.
- [98] Sommerfeld, A.: *Partielle Differentialgleichungen in der Physik*. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt/Main, 1978.
- [99] Stehno, G.; Stickler, H.: *Lärmpegelsenkung durch Flüsterasphalt*. Forschungsges. für d. Straßenwesen im Österr. Ingenieur-und Architekten-Verein, 1986.
- [100] Thompson, D.; Janssens, M.; Dittrich, M.: Rollgeräusche durch den Rad/Schiene-Kontakt - Beurteilung von Lärminderungsmaßnahmen. *ZEVI + DET Glas. Ann.*, **121**(2/3), 226–233, 1997.
- [101] Tröndle, G.: *Effiziente Schallberechnung mit einem adaptiven Mehrgitterverfahren für die 3-D Randelementmethode*, Vol. 21. Braunschweiger Schriften zur Mechanik, 1995.
- [102] Ungar, E.E.: Damping by viscoelastic layers. *Applied Mechanics Review*, **53**(6), R33–R38, 2000.
- [103] V. Kregel, R. Brüggemann: *Laut ist out!* Bundesministerium für Umwelt, Naturschutz und Reaktorsicherheit, 2000.
- [104] VDI 2719: *Schalldämmung von Fenstern und deren Zusatzeinrichtungen*. DIN Taschenbuch 313: Akustik, Lärminderung und Schwingungstechnik 2 - Geräusche in der Wohnnachbarschaft. Beuth, 1997.
- [105] Wilton, D. T.: Acoustic Radiation and Scattering from elastic structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **13**, 123–138, 1978.
- [106] Wu, T.W.; Seybert, A. F.; Li, W. L.: Application of the coupled FEM/BEM techniques to structural acoustics using consistent isoparametric elements. *Vibration control of mechanical, structural, and fluid-structural systems. ASME, Pressure Vessels and Piping Design*, **202**, 25–30, 1990.

- 
- [107] Wu, T.W.; Seybert, A.F.: Acoustic Radiation and Scattering In *Boundary Element Methods in Acoustics*. (Ciskowski, R.D.; Brebbia, C.A., Eds.), Computational Mechanics Publications - Elsevier Applied Science, 1991.
- [108] Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L.: *The finite element method*. McGraw-Hill, 1989.
- [109] Zienkiewicz, O.C.; Kelly, D.; P.Bettess: The Coupling of Finite Element and Boundary Element Procedures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **13**, 355–375, 1977.
- [110] Zwicker, E.; Fastl, H.: *Psychoacoustics*. Springer-Verlag, Berlin, 1999.

# Braunschweiger Schriften zur Mechanik — BSM

Bisher erschienene Berichte in dieser Reihe

- 1–1990 Plonski, T.:  
Dynamische Analyse von schnelldrehenden Kreiszylinderschalen
- 2–1991 Wegener, K.:  
Zur Berechnung großer plastischer Deformationen mit einem Stoffgesetz vom Über-  
spannungstyp
- 3–1991 Gröhlich, H.:  
Finite–Element–Formulierung für vereinheitlichte inelastische Werkstoffmodelle oh-  
ne explizite Fließflächenformulierung
- 4–1992 Hesselbarth, H.:  
Simulation von Versetzungsstrukturbildung, Rekristallisation und Kriechschädigung  
mit dem Prinzip der zellulären Automaten
- 5–1992 Schlums, H.:  
Ein stochastisches Werkstoffmodell zur Beschreibung von Kriechen und zyklischem  
Verhalten metallischer Werkstoffe
- 6–1992 Kublik, F.:  
Vergleich zweier Werkstoffmodelle bei ein– und mehrachsigen Versuchsführungen  
im Hochtemperaturbereich
- 7–1992 Bechtloff, J.:  
Interpolationsverfahren höheren Grades für Robotersteuerungen
- 8–1993 Müller, M.:  
Dreidimensionale elastodynamische Analyse von Tanks mit fluidbenetzten Einbau-  
ten
- 9–1993 Senker, P.:  
Stabilitätsanalyse elastischer Rotorsysteme
- 10–1993 Cheng, W.:  
Schallabstrahlung einer schwingenden Reissner/Mindlin Platte
- 11–1993 Wiebe, T.:  
Wellenausbreitung in poroelastischen Medien: Untersuchung mit Rand-  
integralgleichungen
- 12–1993 Hahne, M.:  
Beschreibung der plastischen Längsdehnung bei Torsion mit einem makroskopischen  
Stoffgesetz

- 13–1993 Heisig, G.:  
Zum statischen und dynamischen Verhalten von Tiefbohrsträngen in räumlich gekrümmten Bohrlöchern
- 14–1994 Araújo, F. C.:  
Zeitbereichslösung linearer dreidimensionaler Probleme der Elastodynamik mit einer gekoppelten BE/FE–Methode
- 15–1994 Kristen, M.:  
Untersuchung zur elektrischen Ansteuerung von Formgedächtnis-Antrieben in der Handhabungstechnik
- 16–1994 Latz, K.:  
Dynamische Interaktion von Flüssigkeitsbehältern
- 17–1994 Jäger, M.:  
Entwicklung eines effizienten Randelementverfahrens für bewegte Schallquellen
- 18–1994 August, M.:  
Schwingungen und Stabilität eines elastischen Rades, das auf einer nachgiebigen Schiene rollt
- 19–1994 Erbe, M.:  
Zur Simulation des Rißwachstums in dreidimensionalen, elastisch-plastischen Strukturen mit der Methode der Finiten Elemente
- 20–1995 Gerdes, R.:  
Ein stochastisches Werkstoffmodell für das inelastische Materialverhalten metallischer Werkstoffe im Hoch- und Tieftemperaturbereich
- 21–1995 Tröndle, G.:  
Effiziente Schallberechnung mit einem adaptiven Mehrgitterverfahren für die 3-D Randelementmethode
- 22–1996 Degenhardt, R.:  
Nichtlineare dynamische Bauwerksprobleme und Interaktion mit dem Baugrund
- 23–1996 Feise, H.J.:  
Modellierung des mechanischen Verhaltens von Schüttgütern
- 24–1996 Haubrok, D.:  
Reibungsfreie Kontaktprobleme der 2D-Elastostatik und -dynamik als Optimierungsaufgabe mit REM
- 25–1996 Lehmann, L.:  
Numerische Simulation der Spannungs- und Geschwindigkeitsfelder in Silos mit Einbauten

- 26–1996 Klein, R.:  
Dynamische Interaktion von dünnwandigen Tragwerken und Boden mit Abschirmschlitzten
- 27–1996 Kopp, T.:  
Simulation großer inelastischer Deformationen bei Torsionsversuchen
- 28–1997 Harder, J.:  
Simulation lokaler Fließvorgänge in Polykristallen
- 29–1997 Lewerenz, M.:  
Zur numerischen Behandlung von Werkstoffmodellen für zeitabhängig plastisches Materialverhalten
- 30–1997 Meywerk, M.:  
Stabilität und Verschleiß bei auf Schienen laufenden Eisenbahnradsätzen
- 31–1997 Plagge, F.:  
Nichtlineares, inelastisches Verhalten von Spiralseilen
- 32–1997 Neubert, M.:  
Richtungsregelung beim Tiefbohren
- 33–1998 Sangi, D.:  
Die Versetzungsstrukturbildung in Metallen
- 34–1998 Thielecke, F.:  
Parameteridentifizierung von Simulationsmodellen für das viskoplastische Verhalten von Metallen - Theorie, Numerik, Anwendung
- 35–1998 Vietgen, J.:  
Numerische Simulation duktilen Rißwachstums mit Berücksichtigung von Schädigung
- 36–1998 Lär, B.:  
Einfluß transienter Anregungen auf die Zylinderkopf-Akustik
- 37–1998 Scheld, C.:  
Auswirkungen dynamischer Interaktionen auf das Schwingungsverhalten von Tanks
- 38–1999 Baaran, J.:  
Schallfeldanalyse bei sich bewegenden schallerzeugenden Körpern
- 39–1999 Daros, C.H.:  
Wave propagation in unbounded piezoelectric media of transversely isotropic symmetry

40–2000 Wagner, N.:

Untersuchung der Boden-Fahrzeug-Interaktion mit gekoppelten Rand- und Finite-Element-Methoden